

## Лабораторная работа №9

### Четное поле. Конформное преобразования.

#### Предварительные замечания.

Четное поле в области паза образуется при постоянной разности скалярных магнитных потенциалов между сердечниками. Это условие соответствует отсутствию тока в пазу рассматриваемого зубцового деления.

Четное поле может быть определено при использовании конформного

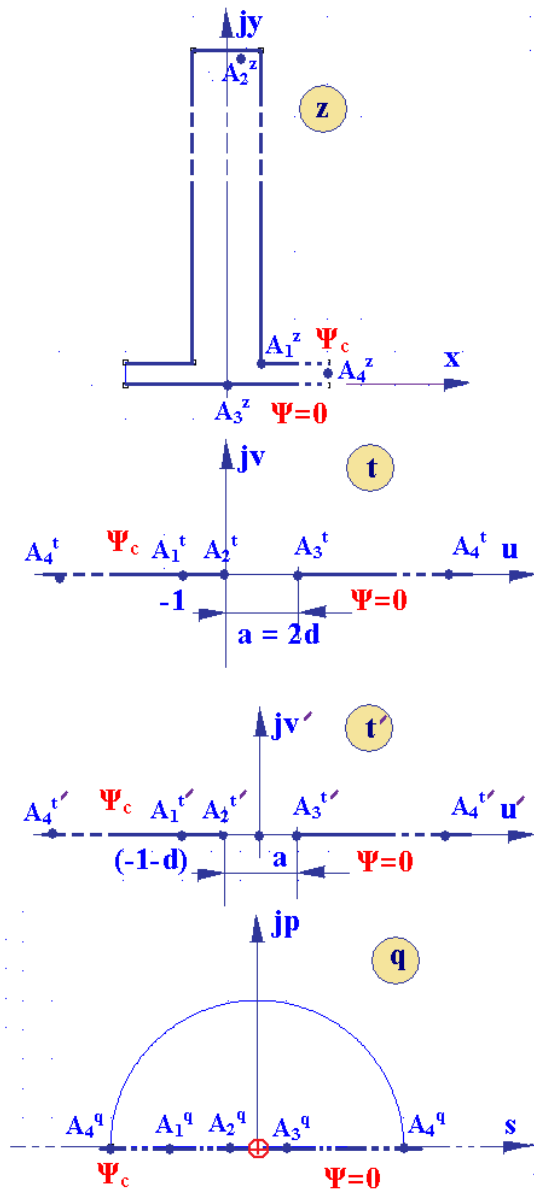
преобразования

Шварца-

Кристоффеля.

Последовательность

конформных преобразований, приводящая к задаче, аналитическое решение которой известно (комплексная плоскость  $q$ , задача о поле линейного тока на поверхности ферромагнитного сердечника), показана на рис. 1. Аналитические выражения для преобразований координат и для комплексных потенциальных функций приведены ниже.



$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left( \frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arth}(\eta) \right],$$

$$a = \left( \frac{\delta}{b} \right)^2 \quad \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$

$$t' = u' + jv' = \left( t - \frac{a}{2} \right) = \left( u - \frac{a}{2} \right) + jv$$

$$q = \frac{2t' + \sqrt{4(t')^2 - 4d \cdot d}}{2d} = \frac{t'}{d} + \sqrt{\left( \frac{t'}{d} \right)^2 - 1}$$

Рис. 1. Последовательность преобразований при решении задачи о четном поле.

Приведенные формулы преобразований координат позволяют выявить некоторые особенности конечно-элементных моделей, связанных конформными преобразованиями.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть в плоскости  $z$  заданы: ширина паза  $2b = 20$  мм, зубцовое деление  $t_z = 30$  мм, зазор  $\delta = 7$  мм. Координаты точек  $A_1$ ,  $A_3$  и  $A_4$  в плоскости  $z$ , таким образом, равны соответственно  $10 + 7i$ ,  $0 + 0i$  и  $25 + 0i$ . Поскольку точки  $A_1$ ,  $A_3$  и  $A_4$  в плоскости  $z$  расположены на внешней границе области задачи, в плоскостях  $t$  и  $t'$  отображаются на вещественные оси и координаты сходственных точек являются действительными числами. Это существенно облегчает нахождение координат  $A_1^t$ ,  $A_3^t$ ,  $A_4^t$  и  $A_1^{t'}$ ,  $A_3^{t'}$ ,  $A_4^{t'}$  - в этом случае удобно воспользоваться последовательными приближениями: задавая координатой точки в плоскости  $t$ , по формуле преобразования вычислять ее координату в плоскости  $z$ , постепенно приближаясь к заданному значению.

Ниже показано, как вычисляются координаты точек  $A_1^t$  и  $A_4^t$ .

$$A_{1z} := 10 + 7i$$

$$A_{1z} = 10 + 7i$$

$$a_z = 0.49$$

$$dlt = 7 \text{ мм}$$

$$A_{1t_{\text{предв}}} := -1 + 0.0000001$$

$$A_{1t_{\text{предв}}} = -1$$

$$\eta_{A1} := \sqrt{\frac{A_{1t_{\text{предв}}} - a_z}{A_{1t_{\text{предв}}} + 1}}$$

$$\eta_{A1} = 3860.052i$$

$$A_{1z_{\text{расч}}} := \frac{2 \cdot dlt}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a_z}} \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{\eta_{A1}}{\sqrt{a_z}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \eta_{A1}}{1 - \eta_{A1}} \right) \right)$$

$$A_{1z_{\text{расч}}} = 10 + 7i \text{ мм}$$

$$A_{1z} = 10 + 7i$$

$$A_{4z} := 25$$

$$A_{4z} = 25$$

$$A_{4t_{\text{предв}}} := 1790$$

$$A_{4t_{\text{предв}}} = 1790$$

$$\eta_{A4} := \sqrt{\frac{A_{4t_{\text{предв}}} - a_z}{A_{4t_{\text{предв}}} + 1}}$$

$$\eta_{A4} = 1$$

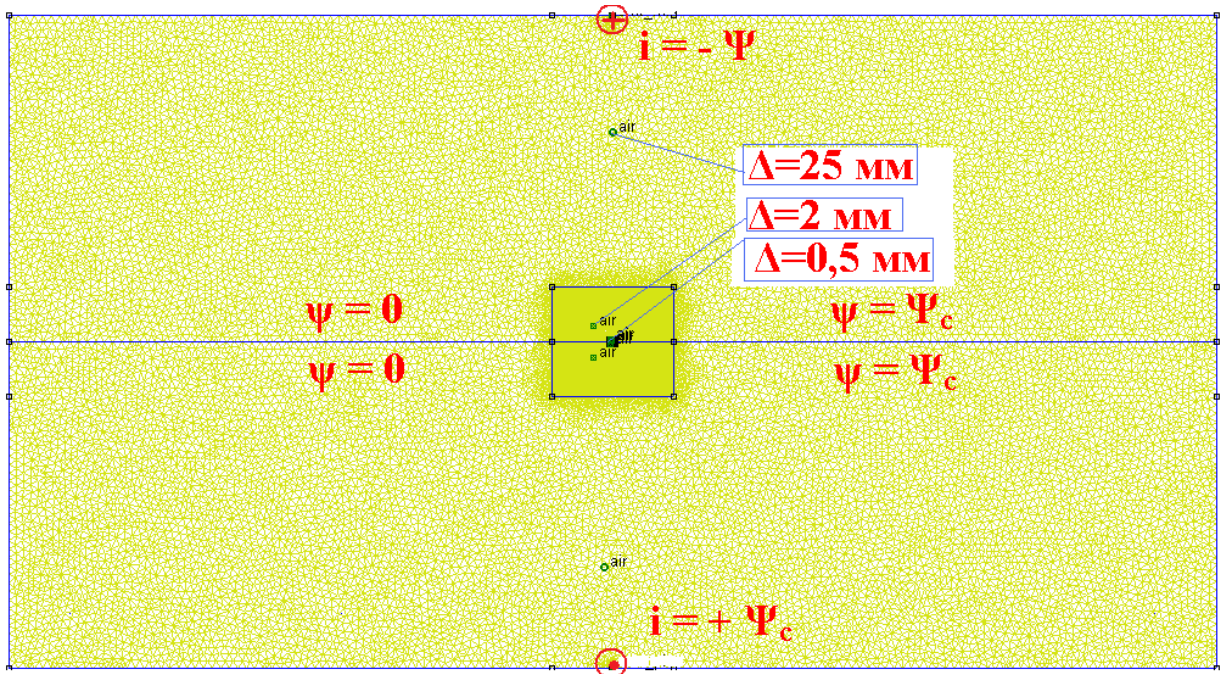
$$A_{4z_{\text{расч}}} := \frac{2 \cdot dlt}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a_z}} \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{\eta_{A4}}{\sqrt{a_z}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \eta_{A4}}{1 - \eta_{A4}} \right) \right)$$

$$A_{4z_{\text{расч}}} = 25 \text{ мм}$$

$$A_{4z} = 25$$

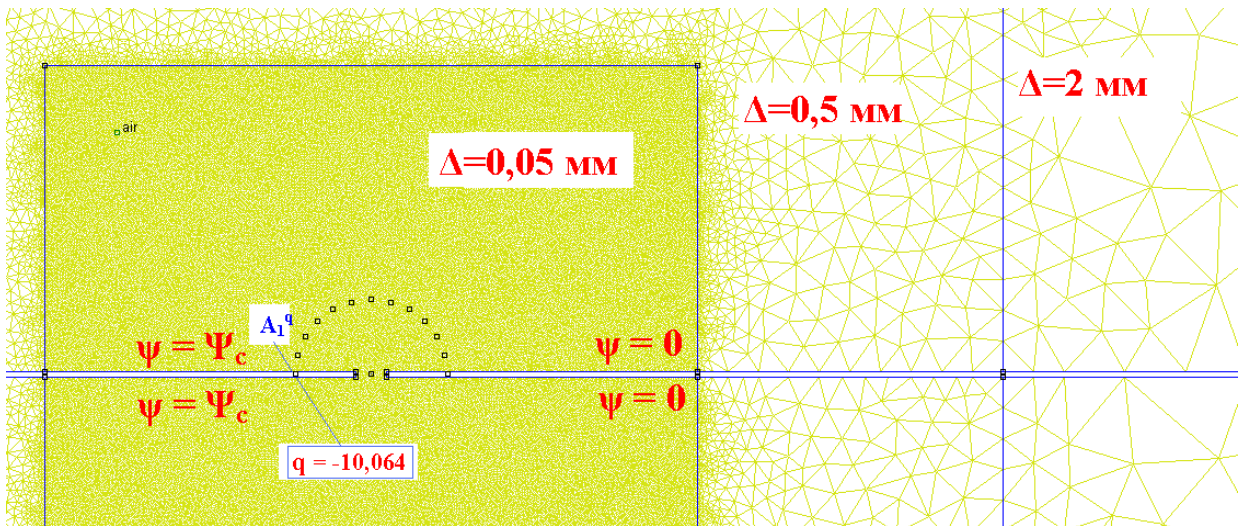
Эти расчеты показывают, что уже при первом преобразовании точка  $A_4$  удаляется от начала координат на 1790 мм, в то время как точка  $A_1$ ,

напротив, приближается к началу координат и располагается на расстоянии 1 мм от него. При этом, поскольку нас интересует поле в области раскрытия паза, окрестность начала координат должна быть воспроизведена с достаточно высокой подробностью, т.е. размеры конечных элементов в этой зоне должны быть достаточно малы. Это означает, что при конформном преобразовании всей области задачи необходимо в преобразованной области формировать зоны с существенно различной дробностью конечно-элементной структуры. На рисунках 2 и 3 показана конечно-элементная модель области паза с указанными размерами после первого преобразования.



**Рис. 2. Конечно-элементная модель первого конформного преобразования (задача о поле двух намагниченных пластин)**

Эти формулы позволяют по размерам  $b$  и  $\delta$ , заданным в плоскости  $z$ , и координатам рассматриваемых точек (точек наблюдения) в плоскости  $z$  рассчитать координаты сходственных им точек в других плоскостях, в том числе в плоскости  $q$ , для которой известно аналитическое решение задачи.



**Рис. 3. Фрагмент конечно-элементной модели, полный вид которой показан на предыдущем рисунке. Центральная часть модели. Показаны точки, лежащие на одной силовой линии**

Покажем, как, пользуясь формулами преобразования координат, можно определить координаты точек, лежащих на силовой линии, проходящей через заданную точку.

Найдем координаты точек, лежащих на силовой линии, проходящей через отображение точки  $A1$  в плоскости  $q$ . Известно, что в плоскости  $q$  силовая линия (эквипотенциаль векторного магнитного потенциала) представляет собой окружность (точнее, половину окружности).

$$j_{\max} := 13 \quad j := 1, 2 \dots j_{\max}$$

$$\operatorname{Re}_{q1,j} := -10.0639 \cdot \cos\left[\frac{\pi \cdot (j-1)}{12}\right] \quad \operatorname{Im}_{q1,j} := 10.0639 \cdot \sin\left[\frac{\pi \cdot (j-1)}{12}\right]$$

$\operatorname{Re}_q =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-10.06	-9.72	-8.72	-7.12	-5.03	-2.6	0	2.6	5.03	7.12

$\operatorname{Im}_q =$	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2.6	5.03	7.12	8.72	9.72	10.06

$$q_{1,j} := \operatorname{Re}_{q1,j} + \operatorname{Im}_{q1,j} \cdot i$$

$q =$	1	2	3	4	5
1	-10.064	-9.721+2.605i	-8.716+5.032i	-7.116+7.116i	-5.032+8.716i

$q =$	6	7	8	9	10
1	-2.605+9.721i	10.064i	2.605+9.721i	5.032+8.716i	7.116+7.116i

$q =$	9	10	11	12	13
1	5.032+8.716i	7.116+7.116i	8.716+5.032i	9.721+2.605i	10.064

$$t' = \frac{d \cdot (q^2 + 1)}{2q} \quad (t_{\text{prim}})_{1,j} := \frac{0.245 \cdot [(q_{1,j})^2 + 1]}{2 \cdot q_{1,j}}$$

t_prim =		1	2	3	4	5
1		-1.245	-1.203+0.316i	-1.078+0.61i	-0.88+0.863i	-0.622+1.057i

t_prim =		6	7	8	9	10
1		-0.322+1.179i	1.221i	0.322+1.179i	0.622+1.057i	0.88+0.863i

t_prim =		9	10	11	12	13
1		0.622+1.057i	0.88+0.863i	1.078+0.61i	1.203+0.316i	1.245

$$t_{1,j} := t_{\text{prim}1,j} + d_t$$

t =		1	2	3	4	5
1		-1	-0.958+0.316i	-0.833+0.61i	-0.635+0.863i	-0.377+1.057i

t =		6	7	8	9	10
1		-0.077+1.179i	0.245+1.221i	0.567+1.179i	0.867+1.057i	1.125+0.863i

t =		9	10	11	12	13
1		0.867+1.057i	1.125+0.863i	1.323+0.61i	1.448+0.316i	1.49

### Координаты точек силовой линии в исходной плоскости z:

$$\eta_{1,j} := \sqrt{\frac{t_{1,j} - a_z}{t_{1,j} + 1}}$$

η =		1	2	3	4	5	6
1		6.991i+103	1.585+1.461i	1.158+0.981i	0.973+0.752i	0.866+0.605i	0.794+0.494i

η =		8	9	10	11	12	13
1		0.705+0.324i	0.678+0.252i	0.658+0.186i	0.644+0.122i	0.636+0.061i	0.634

$$z_{\text{расч}1,j} := \frac{2 \cdot d_t}{\pi} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{a_z}} \cdot \operatorname{atan} \left( \frac{\eta_{1,j}}{\sqrt{a_z}} \right) + \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \eta_{1,j}}{1 - \eta_{1,j}} \right) \right)$$

z_расч. =		1	2	3	4	5	6	мм
1		10+7i	9.854+6.837i	9.615+6.52i	9.349+6.093i	9.083+5.578i	8.836+4.994i	

z_расч. =		7	8	9	10	11	12	мм
1		8.617+4.356i	8.431+3.678i	8.28+2.971i	8.163+2.244i	8.081+1.503i	8.032+0.753i	

z_расч. =		8	9	10	11	12	13	мм
1		8.431+3.678i	8.28+2.971i	8.163+2.244i	8.081+1.503i	8.032+0.753i	8.016	

Кроме начальной точки  $A1^q$  на эквипотенциали взято еще 12 точек, отстоящих друг от друга на отрезки дуги, соответствующие центральному углу  $\pi/12$  (т.е. на одинаковые разности скалярного магнитного потенциала  $\Psi/12$  – в плоскости  $q$  эквипотенциали скалярного магнитного потенциала представляют собой радиальные линии, проходящие через начало координат, т.е. через центр поперечного сечения линейного тока).



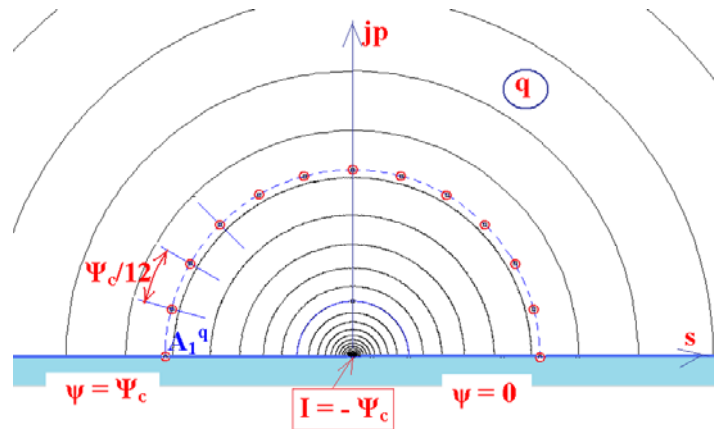


Рис. 4. Выбор точек на силовой линии в плоскости  $q$

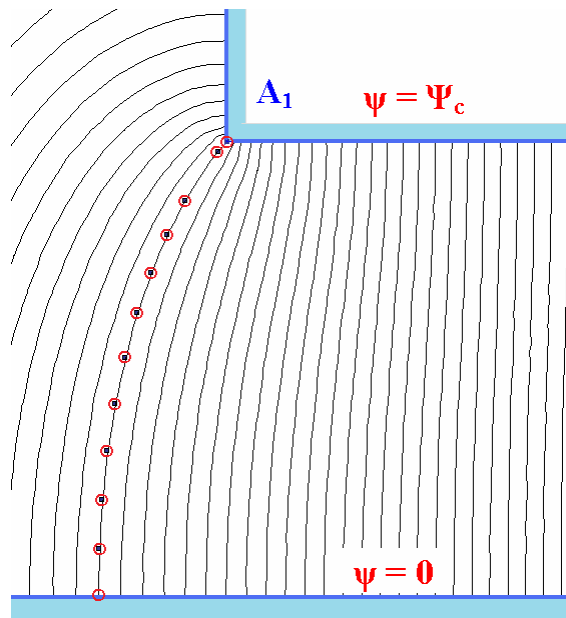


Рис. 5. В исходной плоскости  $z$  расчетные точки также располагаются на одной силовой линии

С помощью формул преобразования координат можно получить также выражения для комплексных потенциальных функций, описывающих четное поле в каждой из рассматриваемых плоскостей. Напомним, что действительной составляющей комплексных потенциальных функций является функция потока, пропорциональная векторному магнитному потенциалу, а мнимой составляющей – функция скалярного магнитного потенциала, определить который на конечно-элементной модели можно, проинтегрировав тангенциальную составляющую напряженности магнитно-

го поля на пути от точки с известным скалярным магнитным потенциалом до точки наблюдения.

На этом основании можно предложить один из способов оценки точности численной конечно-элементной модели, сформированной с помощью конформного преобразования. Поскольку координаты сходственных точек в каждой из плоскостей определены точно (т.к. рассчитаны по аналитическим выражениям) и аналитическое выражение для комплексной потенциальной функции в конечной плоскости преобразования также известно, могут быть рассчитаны точные значения функции потока и скалярного магнитного потенциала в любых точках исходной плоскости. Сравнение этих значений со значениями, найденными по результатам моделирования, позволяет судить о точности модели.

Ниже приведены выражения для комплексных потенциальных функций, описывающих рассматриваемое поле в плоскостях  $q$ ,  $t'$  и  $t$ .

$$w(q) = \varphi(q) + j\psi(q) = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln(q)$$

$$w(t') = \varphi(t') + j\psi(t') = \frac{\Psi_0}{\pi} \operatorname{arch}\left(\frac{t'}{d}\right)$$

$$w(t) = \varphi(t) + j\psi(t) = \frac{\Psi_c}{\pi} \operatorname{arch}\left[\frac{2}{a}\left(t' - \frac{a}{2}\right)\right]$$

### **Программа работы.**

1. По данным, приведенным в таблице, построить область задачи в исходной плоскости  $z$  и задать необходимые граничные условия.

2. Рассчитать координаты характерных точек и построить конечно-элементные модели, соответствующие первому, второму и третьему конформным преобразованиям. Ограничить максимальное число узлов каждой модели ста пятьюдесятью тысячами.

3. Рассчитать координаты сходственных точек, лежащих на силовых линиях, проходящих через точку  $A1^z$  и ее отображения в других плоскостях.

4. Сравнить значения комплексных потенциальных функций в сходственных точках, определенные по данным моделирования.

5. Оценить точность моделирования комплексной потенциальной функции в сходственных точках каждой плоскости.

6. Составить отчет (презентацию) по результатам выполненной работы.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7
$t_z$ , мм	60	50	50	40	40	35	30
$2b$ , мм	22	25	20	20	18	16	16
$\delta$ , мм	8	7	7	6	4	3	3
$B_{max}$ , Тл	0,90	0,85	0,80	0,85	0,75	0,90	0,85

**Обозначения:**

$t_z$  - зубцовое деление

$2b$  – ширина паза

$\delta$  – зазор

$B_{max}$  – значение индукции под серединой зубца