

# Методы анализа электрических машин

Уточнение общей теории ЭМ с помощью МЗК  
– гармонический анализ

МА-05

2023

# Уточнение общей теории электрических машин



Допущения общей теории электрических машин

- отсутствие насыщения
- гладкий немагнитный зазор
- синусоидальные МДС (основная гармоника)

Минимизация допущений – полевой расчет либо применение МЗК (численные модели)

Используем МЗК для уточнения общей теории в рамках аналитической модели

- учтем реальное распределение катушек по пазам
  - дискретность обмотки → ступенчатая кривая МДС
- учтем одностороннюю зубчатость зазора
  - раскрытия пазов → искажения поля в зазоре
  - (другой сердечник – гладкий при эквивалентном зазоре  $\delta k_{\delta 2}$ )

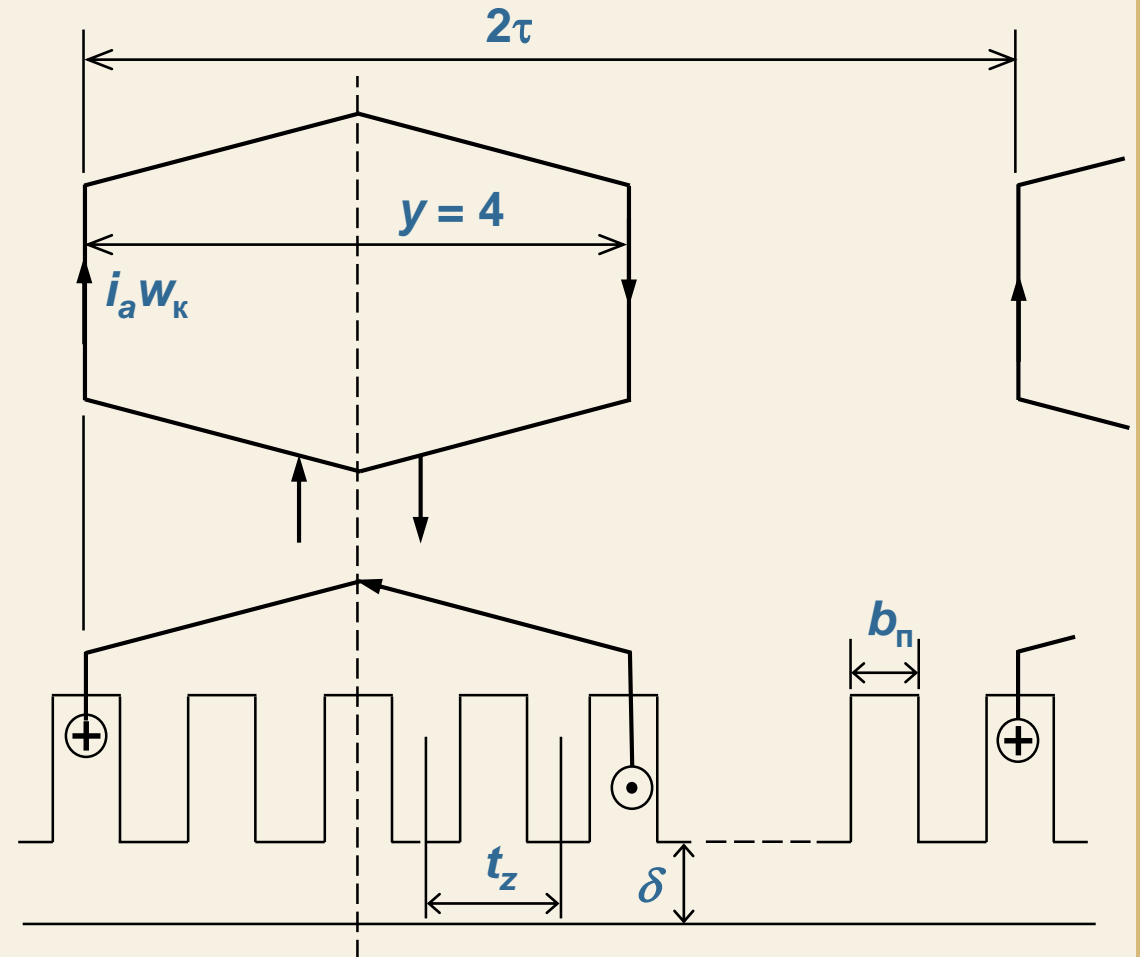
Учет сложного поля в зазоре проведем с помощью метода гармонического анализа

# Фаза простой обмотки с $q = 1$

Анализ МДС и поля в зазоре от токов обмотки в пазах сердечника начнем с элементарного – рассмотрим фазу простой обмотки с  $q = 1$  на одном периоде поля ( $Z = 2\tau$ )

- одна катушечная группа на периоде
- в группе  $q = 1$  катушек
- в катушке  $w_k$  витков
- ток фазы  $i = \sqrt{2}I \cos(\omega t)$
- ток витка  $i_a = i / a$
- сердечник 1 – зубчатый
- сердечник 2 – гладкий
- зазор  $\delta \rightarrow \delta'' = \delta k_{\delta 2}$
- $b_n$  – раскрытие паза

Например, для  $y = 4$



## Фаза простой обмотки с $q = 1$

Воспользуемся МЗК для анализа поля в зазоре  
– найдем токи пазов и токи зубцовых контуров

Обозначим пазы

Токи пазов

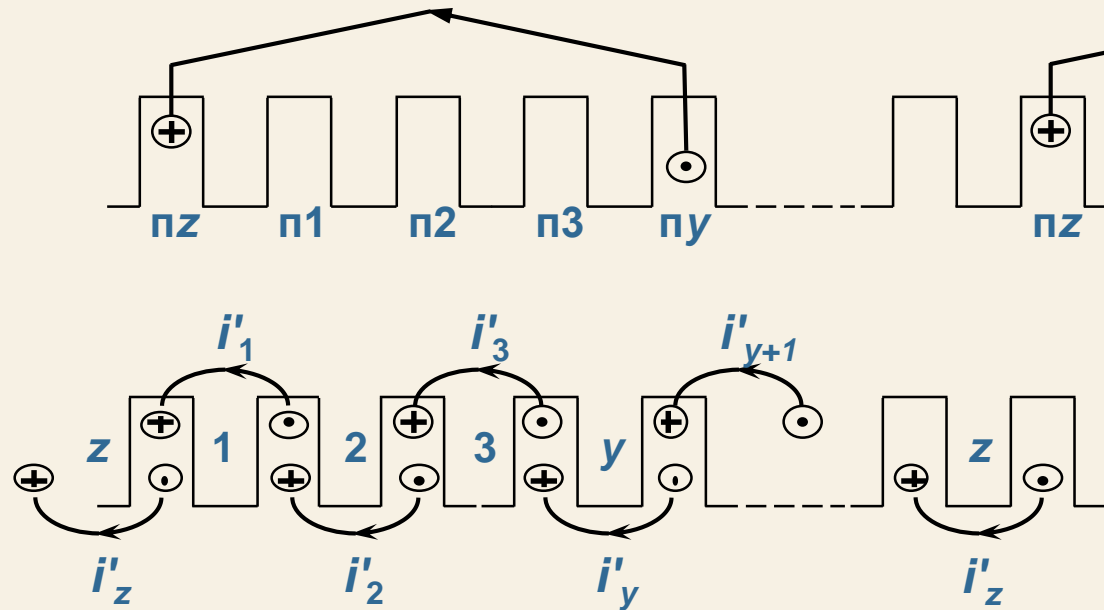
$$i_{пз} = i_a w_k$$

$$i_{пу} = -i_a w_k$$

остальные  $i_{пi} = 0$

Обозначим зубцы

Зубцовые контуры



Токи зубцовых контуров  
с точностью до постоянной  
– *относительные* токи ЗК

пусть  $i'_z = 0$

тогда  $i'_1 = i'_z + i_{пз} = i_a w_k$

$$i'_2 = i'_1 + i_{п1} = i_a w_k$$

$$i'_3 = i'_2 + i_{п2} = i_a w_k$$

$$i'_y = i'_{y-1} + i_{пу-1} = i_a w_k$$

$$i'_{y+1} = i'_y + i_{пу} = 0$$

...

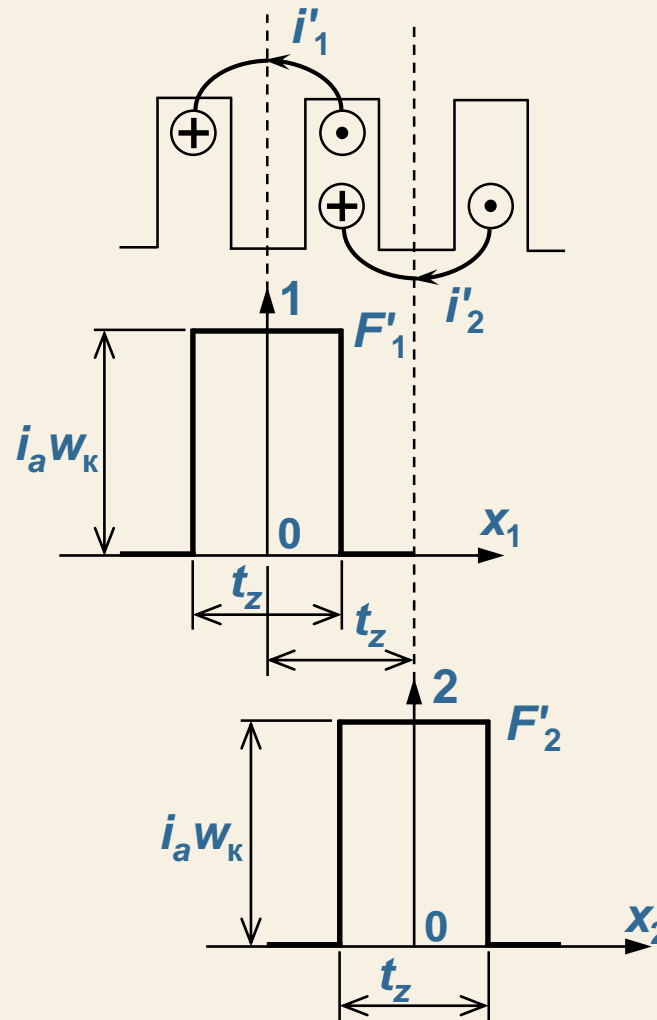
$$i'_{z-1} = 0$$

## Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем МДС зубцового контура  
(запишем МДС в собственной системе координат каждого контура)

Начало координат ЗК 1  
→ ось ЗК 1

Начало координат ЗК 2  
→ ось ЗК 2



Уравнение МДС зубцового контура

- для всех ЗК в пределах катушки  
(для  $k$  от 1 до  $y$ )

$$F'_k = \begin{cases} i'_k = i_a w_k & \text{для } -\frac{t_z}{2} < x_k < \frac{t_z}{2} \\ 0 & \text{для всех других } x_k \end{cases}$$

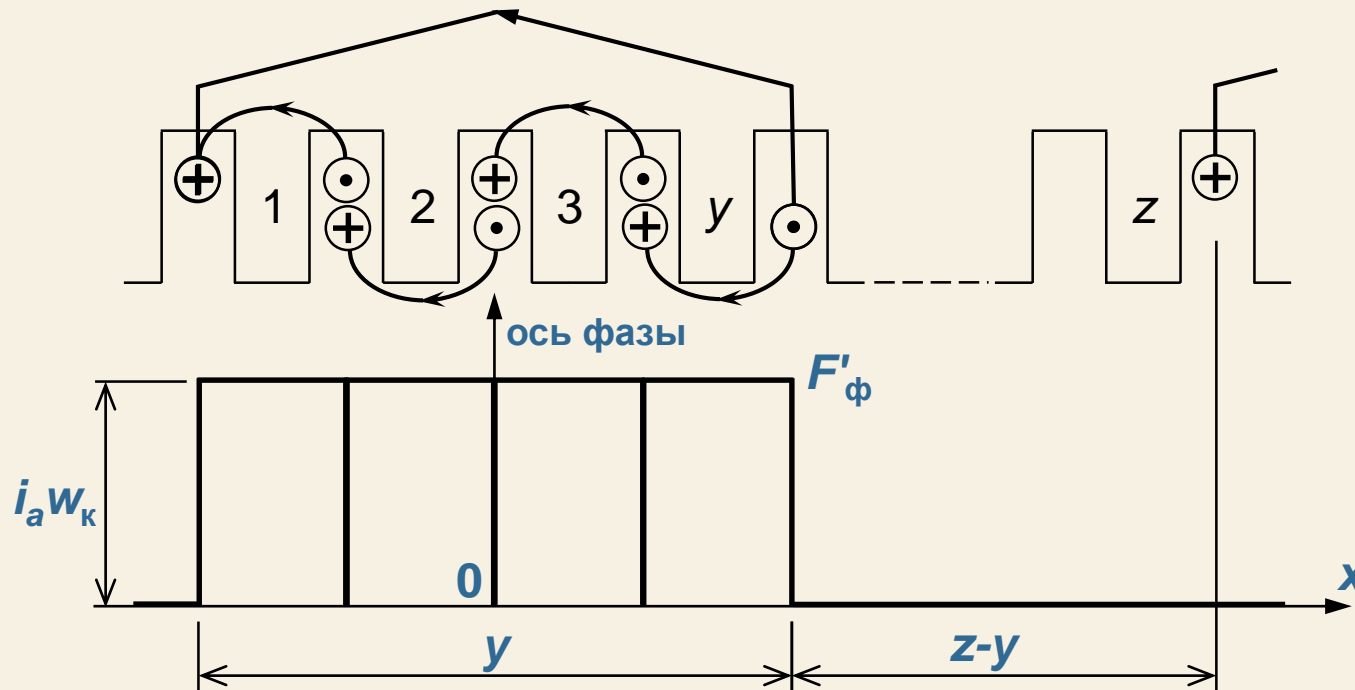
- для всех ЗК за пределами катушки

$$F'_k = i'_k = 0 \quad \text{для всех } x_k$$

## Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем МДС фазы  
(в собственной системе координат фазы)

$$F'_\phi = \sum_{k=1}^z F'_k = \sum_{k=1}^y F'_k$$



Уравнение МДС фазы

$$F'_\phi = \begin{cases} i_a W_k & \text{для } -\frac{y}{2} < x < \frac{y}{2} \\ 0 & \text{для всех других } x \end{cases}$$

## Фаза простой обмотки с $q = 1$

Найдем точные значения токов ЗК

$$i_k = i'_k + \Delta i$$

Постоянная составляющая токов ЗК  
(другой сердечник гладкий)

$$\Delta i = -\frac{1}{z} \sum_{k=1}^z i'_k = -\frac{y i_a w_k}{z}$$

Тогда точные значения токов ЗК:

- для всех ЗК в пределах катушки ( $k = 1 \dots y$ ) 
$$i_k = i'_k + \Delta i = i_a w_k - \frac{y i_a w_k}{z} = \frac{z - y}{z} i_a w_k$$
- для всех ЗК за пределами катушки ( $k > y$ ) 
$$i_k = i'_k + \Delta i = 0 - \frac{y i_a w_k}{z} = -\frac{y}{z} i_a w_k$$

Точные значения МДС зубцового контура  
(в собственной системе координат)

$$F_k = \begin{cases} i'_k + \Delta i & \text{для } -\frac{t_z}{2} < x_k < \frac{t_z}{2} \\ \Delta i & \text{для всех других } x_k \end{cases}$$

Очевидно, можно записать  $F_k = F'_k + \Delta F$

где постоянная составляющая МДС ЗК  $\Delta F = \Delta i = -\frac{y}{z} i_a w_k$

## Фаза простой обмотки с $q = 1$

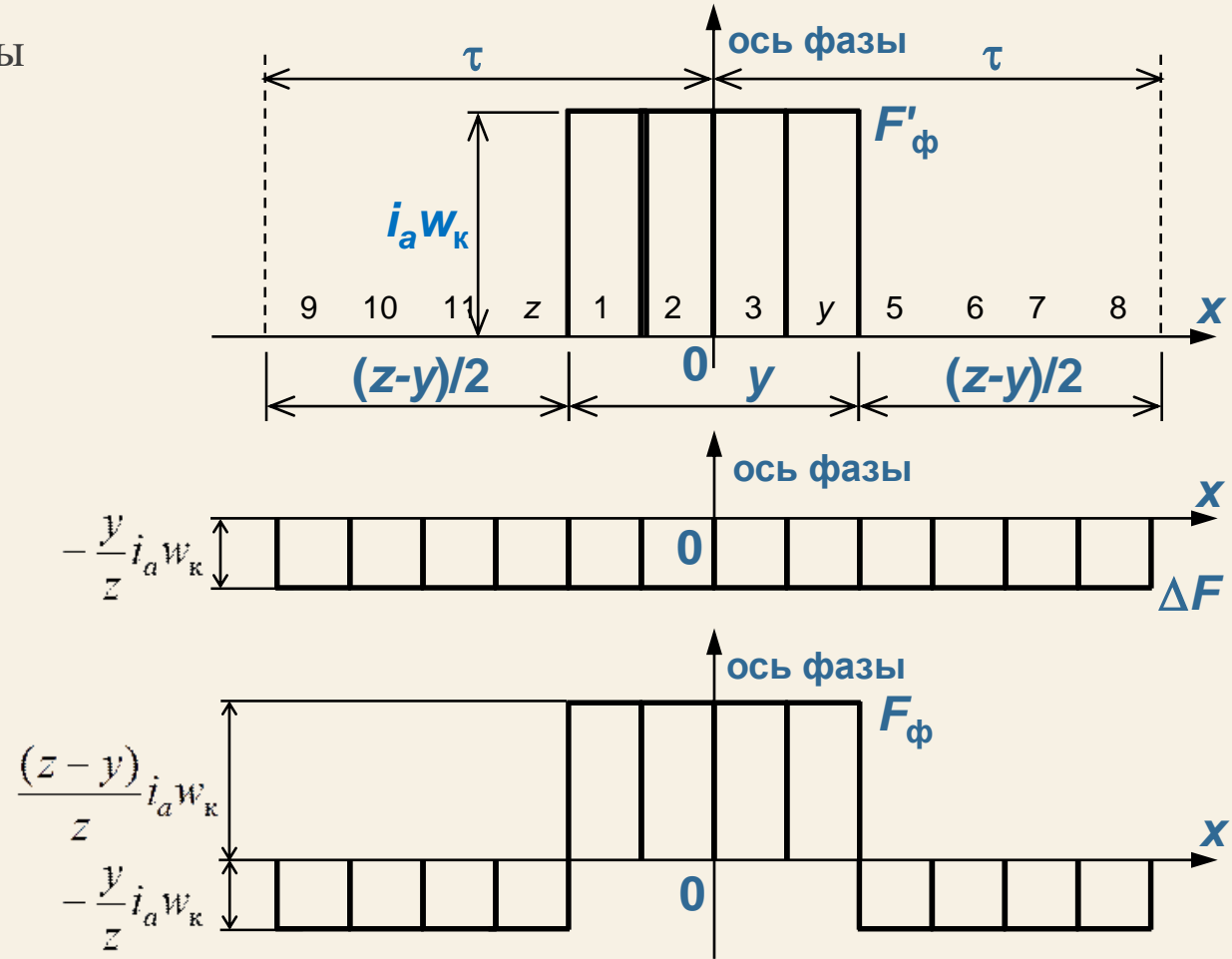
Можно найти точное значение МДС фазы  
(в собственной системе координат фазы)

$$F_{\phi} = \sum_{k=1}^z F_k = F'_{\phi} + \Delta F$$

Уравнение МДС фазы

$$F_{\phi} = \begin{cases} \frac{z-y}{z} i_a w_k & \text{для } -\frac{y}{2} < x < \frac{y}{2} \\ -\frac{y}{z} i_a w_k & \text{для всех других } x \end{cases}$$

МДС фазы – периодическая функция  
с периодом  $2\tau$  и четной симметрией  
относительно оси фазы





# Гармонический анализ МДС фазы

Для анализа периодической функции (прямоугольная волна МДС фазы) воспользуемся гармоническим анализом

$$F_{\phi} = F_{\phi 0} + \sum_{v=1}^{\infty} F_{\phi v}$$

Постоянная составляющая  
(среднее значение на периоде)

$$F_{\phi 0} = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F_{\phi} dx = \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} (F'_{\phi} + \Delta F) dx = 0$$

(точное значение МДС уже «приведено к нулю»)

Каждая гармоническая составляющая  $v$ -го порядка описывается гармонической функцией с полупериодом  $\tau_v = \tau/v$

$$F_{\phi v} = F_{\phi vm} \cos \frac{\pi x}{\tau_v} = F_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$$

Амплитуда  $v$  гармонической МДС фазы

$$\begin{aligned} F_{\phi vm} &= \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F_{\phi} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F'_{\phi} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \Delta F \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx \\ &= F'_{\phi vm} + \Delta F \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = F'_{\phi vm} + 0 \end{aligned}$$

Т.е. гармоника МДС фазы совпадает с гармоникой *относительной* МДС фазы

$$F_{\phi v} = F'_{\phi v} \quad (\text{точные значения не важны, важна амплитуда})$$

## Гармонический анализ МДС фазы

Поскольку МДС фазы равна сумме МДС зубцовых контуров (только относительные значения)

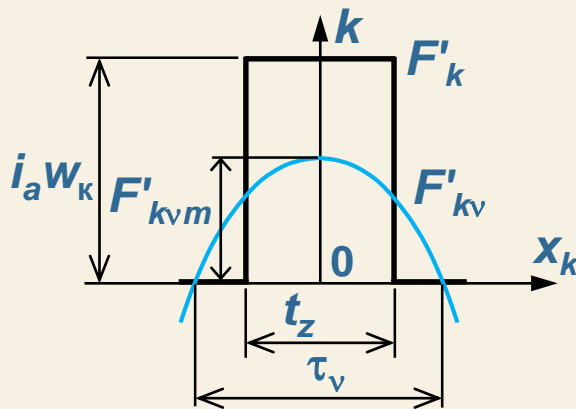
$$F'_\phi = \sum_{k=1}^y F'_k$$

то и  $\nu$  гармоника МДС фазы равна сумме  $\nu$  гармоник МДС этих ЗК

$$F_{\phi\nu} = F'_{\phi\nu} = \sum_{k=1}^y F'_{k\nu}$$

Гармоники прямоугольной волны МДС найти легко (в собственной системе координат – четная функция  $\rightarrow \cos$ )

$$\nu \text{ гармоника МДС ЗК } F'_{k\nu} = F'_{k\nu m} \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau}$$



Амплитуда  $\nu$  гармоники относительной МДС ЗК

$$F'_{k\nu m} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} F'_k \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau} dx_k = \frac{1}{\tau} \int_{-t_z/2}^{t_z/2} (i_a w_k) \cos \frac{\nu\pi x_k}{\tau} dx_k = 2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\pi t_z}{2\tau}$$

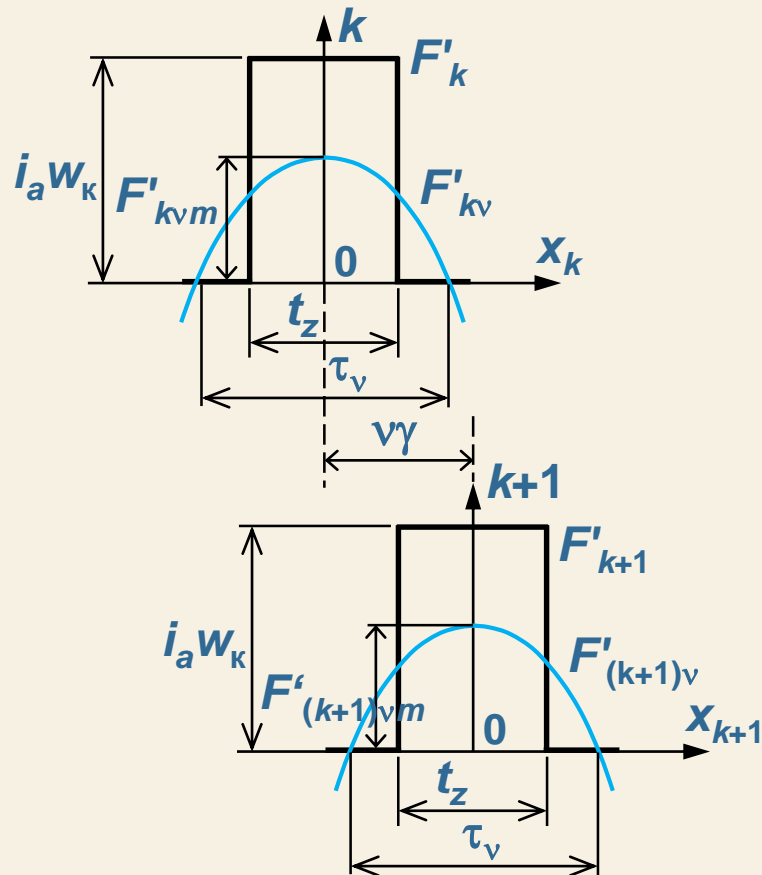
или  $= 2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\gamma}{2}$

где  $\gamma = \frac{\pi t_z}{\tau}$  – угловой размер зубцового деления  $t_z$

Это справедливо для любого ЗК внутри катушки

## Гармонический анализ МДС фазы

МДС соседних ЗК одинаковы, но смещены в пространстве на  $t_z$   
(или на эл. угол  $v\gamma$  по  $v$  гармонике)



Суммировать пространственные гармоники проще  
в комплексной форме

Величина МДС контура  $F = \text{Re}(\dot{F}_m)$

где  $\dot{F}_m$  – комплексная амплитуда МДС, направленная по оси контура

Тогда равенство  $F_{\phi v} = \sum_{k=1}^y F'_{kv}$

запишем в виде  $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = \sum_{k=1}^y \text{Re}(\dot{F}'_{kvm})$

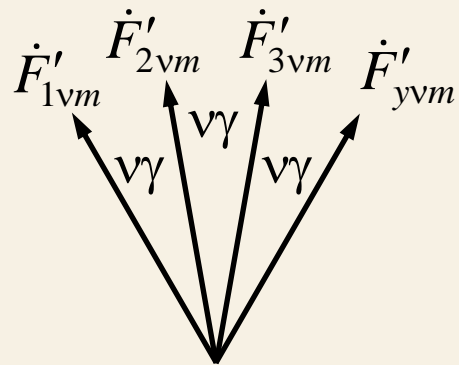
или  $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm}\right)$

Получим векторное равенство  $\dot{F}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm}$

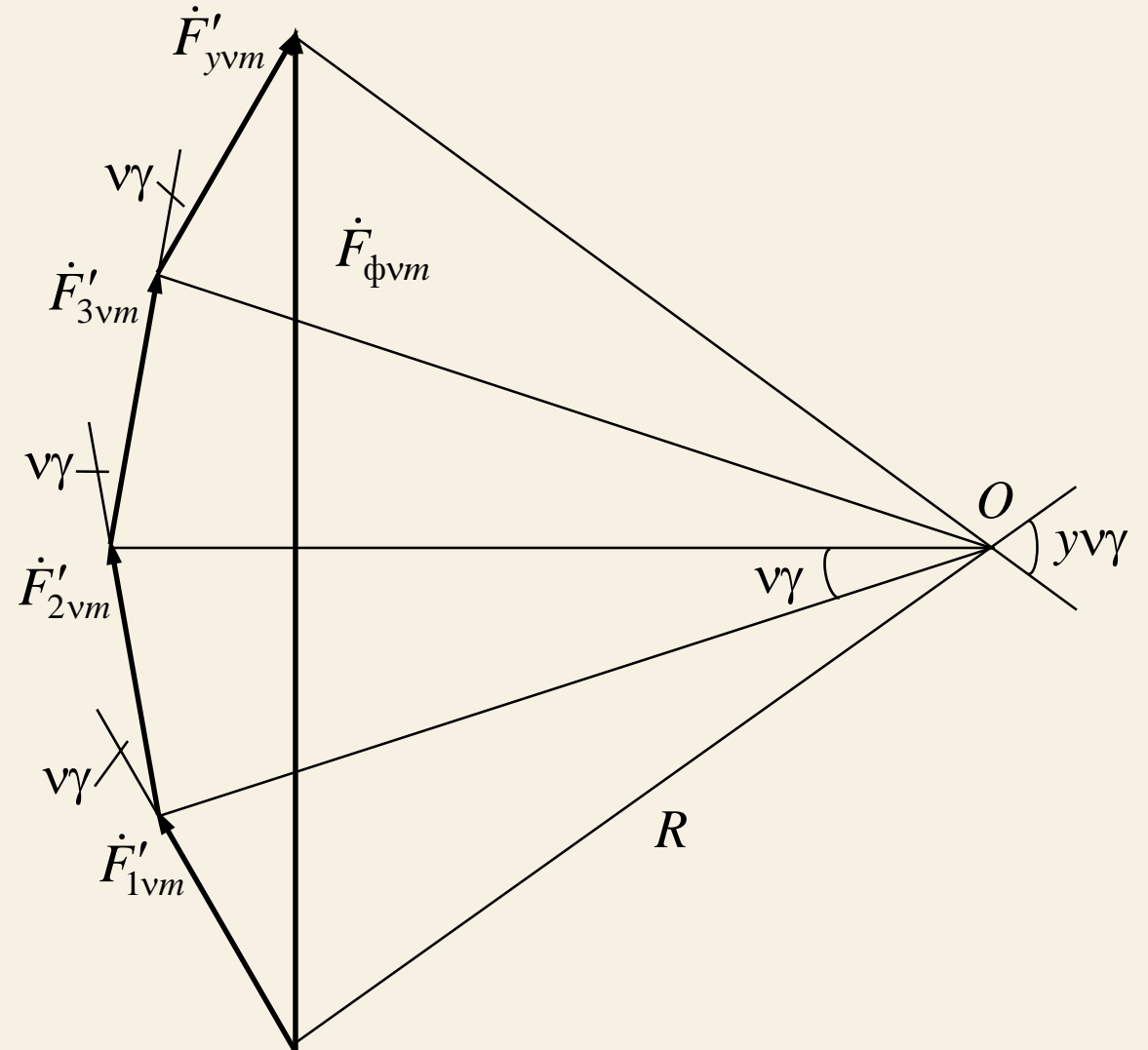
## Гармонический анализ МДС фазы

Построим векторное равенство  $\dot{F}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm}$   
и найдем величину МДС фазы  $\text{Re}(\dot{F}_{\phi vm})$

МДС зубцовых контуров  $\dot{F}'_{kvm}$   
– одинаковые векторы, сдвинутые на угол  $\nu\gamma$



Вектора МДС зубцовых контуров  
вписаны в окружность радиусом  $R$



## Гармонический анализ МДС фазы

Построим срединные перпендикуляры  $OB$  и  $OC$

Рассмотрим треугольник  $OBA$

$$|AB| = R \sin \frac{\nu\gamma}{2} \rightarrow F'_{kvm} = \operatorname{Re}(\dot{F}'_{kvm}) = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Рассмотрим треугольник  $OCD$

$$|CD| = R \sin \frac{\nu\gamma}{2} \rightarrow F_{\phi vm} = \operatorname{Re}(\dot{F}_{\phi vm}) = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

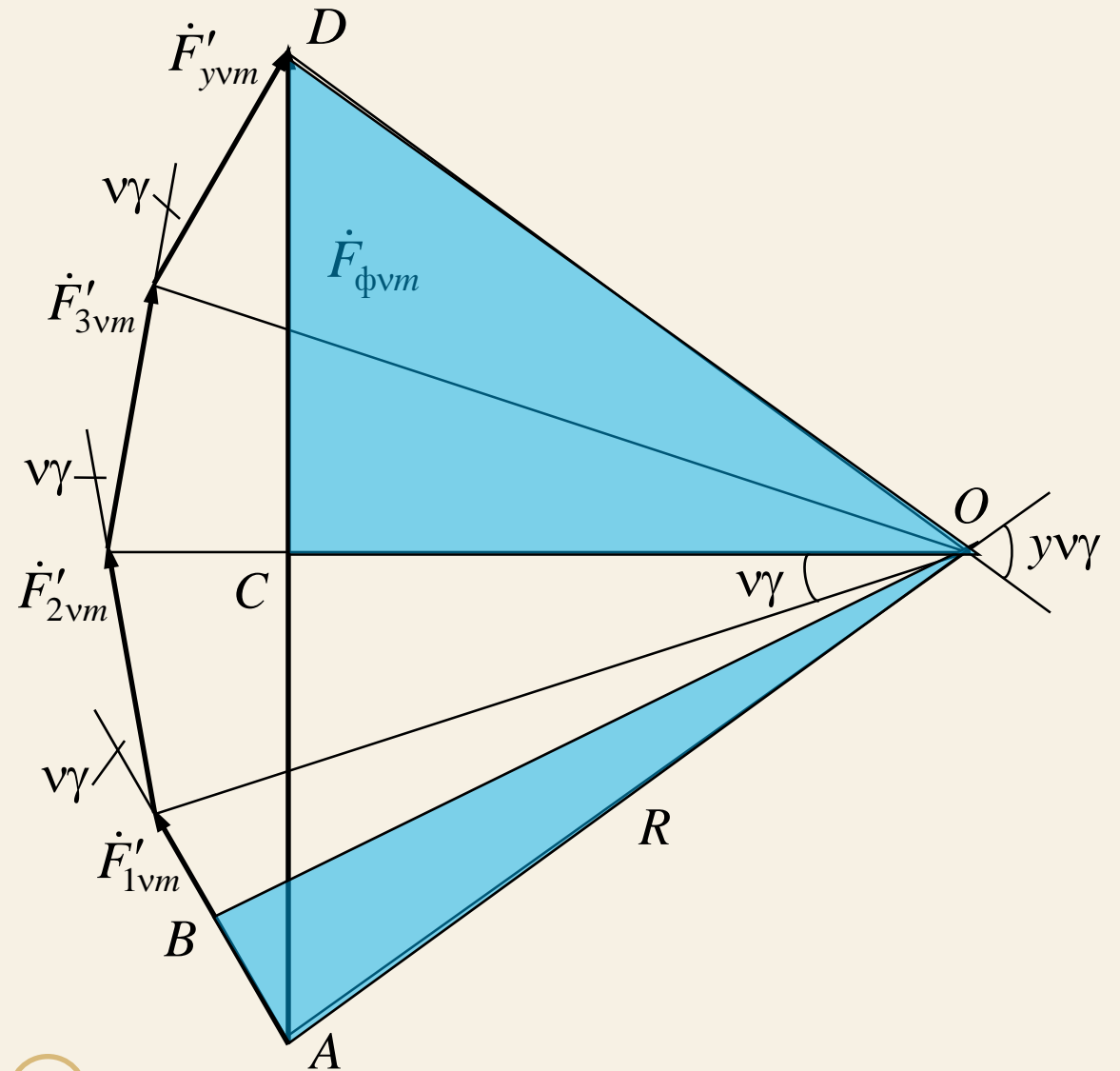
Выразив  $R$ , запишем равенство

$$F_{\phi vm} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = F'_{kvm} \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Подставим амплитуду  $\nu$  гармоники МДС ЗК

$$F_{\phi vm} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = \left( 2 \frac{i_a w_k}{\nu\pi} \sin \frac{\nu\gamma}{2} \right) \sin \frac{\nu\gamma}{2}$$

Получим выражение для  $\nu$  гармоники МДС фазы



## Гармонический анализ МДС фазы

Амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы  $F_{\phi\nu m} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi} \sin \frac{y\nu\gamma}{2}$

или  $F_{\phi\nu m} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi} k_{y\nu}$

где  $k_{y\nu}$  – обмоточный коэффициент укорочения по  $\nu$  гармонике  $k_{y\nu} = \sin \frac{y\nu\gamma}{2} = \sin \frac{y\nu\pi t_z}{2\tau}$

Удобно выразить величины в зубцовых делениях:  
если  $t_z = 1$ , то  $2\tau = m'q$  (для простой обмотки)

$$k_{y\nu} = \sin \frac{y\nu\pi}{m'q}$$

Для обмотки с диаметральной шагом ( $y = \tau$ ) для всех нечетных  $\nu$   $|k_{y\nu}| = 1$

и амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы  $F_{\phi\nu m} \Big|_{y=\tau} = 2 \frac{i_a w_k}{\nu \pi}$

Тогда коэффициент укорочения  $k_{y\nu} = \frac{F_{\phi\nu m}}{F_{\phi\nu m} \Big|_{y=\tau}}$

При укорочении шага обмотки  $k_{y\nu} < 1$   
даже для основной гармоники

# Гармоники поля

МДС фазы  $F_\phi = F'_\phi + \Delta F$  создает магнитное поле в зазоре ЭМ с индукцией  $B_\phi = B'_\phi + B_\Delta$

$B'_\phi$  – индукция магнитного поля, созданного МДС  $F'_\phi$

$B_\Delta$  – индукция магнитного поля, созданного МДС  $\Delta F$

Рассмотрим гармоники индукции магнитного поля  $B_\phi = \sum_{v=1}^{\infty} B_{\phi v}$  вида  $B_{\phi v} = B_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau}$

(постоянная составляющая индукции  $B_{\phi 0} = 0$  в силу непрерывности линий магнитного поля)

Амплитуда  $v$  гармоники индукции магнитного поля фазы

$$B_{\phi vm} = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\phi \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B'_\phi \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx + \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\Delta \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx$$

При постоянном значении  $\Delta F$  на зубцовом делении  $B_\Delta$  меняется из-за раскрытия паза, но форма индукции повторяется на каждом  $t_z$

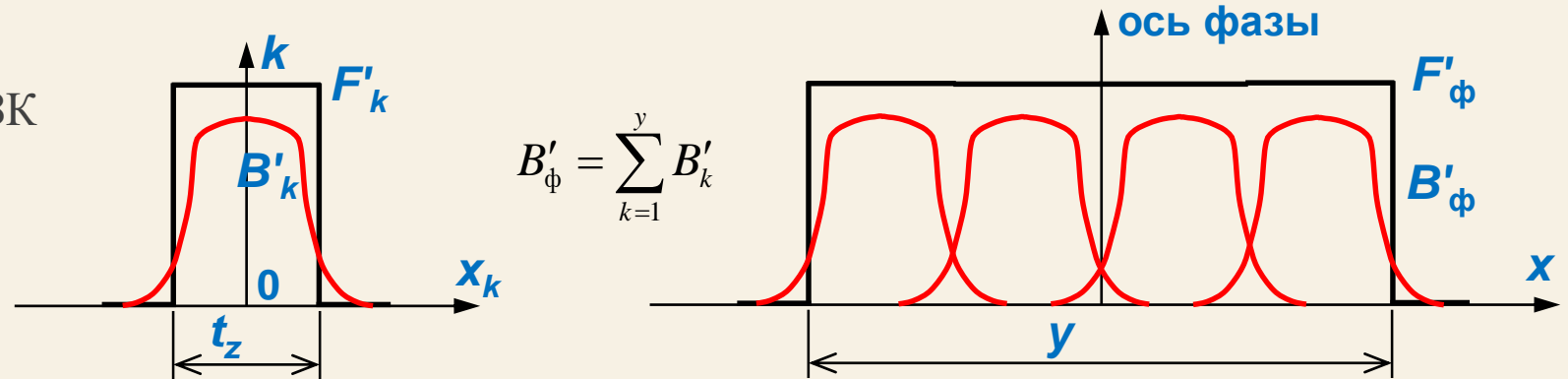
Т.к.  $B_\Delta$  укладывается на периоде целое число раз ( $2\tau/t_z = z$ ), то  $\frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} B_\Delta \cos \frac{v\pi x}{\tau} dx = 0$

Гармоника индукции определяется только  $B'_\phi$ , т.е. создается только относительной МДС фазы  $F'_\phi$

## Гармоники поля

При этом  $B'_\phi$  можно представить суммой индукций поля от МДС отдельных зубцовых контуров

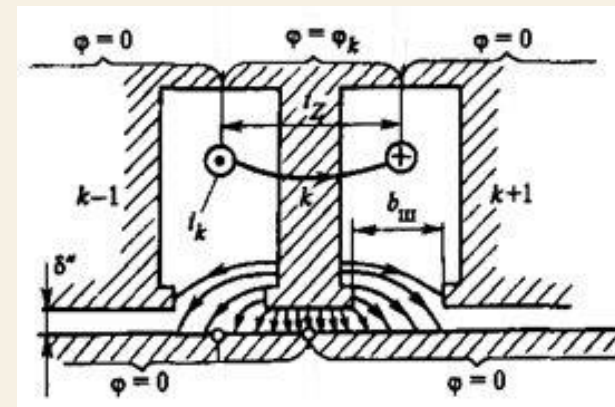
Форма кривой индукции поля ЗК определяется геометрией ( $t_z$ ,  $b_{II}$  и  $\delta$ )



Если контуры являются «глубокими и широкими», то магнитное поле можно рассчитать аналитически (поле в зазоре под пазом равно сумме нечетного поля от тока в пазу и четного поля от тока соседнего паза)

$$B'_k = B_s(x) + B_c(x)$$

Рассчитав кривую индукции поля ЗК, можно разложить ее на гармоники чтобы просуммировать гармоники зубцовых контуров





## Гармоники поля

Можно найти кривую индукции ЗК и разложить ее на гармоники – как правило, это можно сделать только численно

В инженерной практике для расчета гармоник индукции ЗК используют методику Т.Г. Сорокера

Прямоугольная МДС  $k$  зубцового контура (на рисунке –  $\varphi_k$ ) создает реальную кривую индукции  $B_k$ , с гармониками  $B_{kv}$  ( $B_{kvm}$  и  $\tau_v$ )

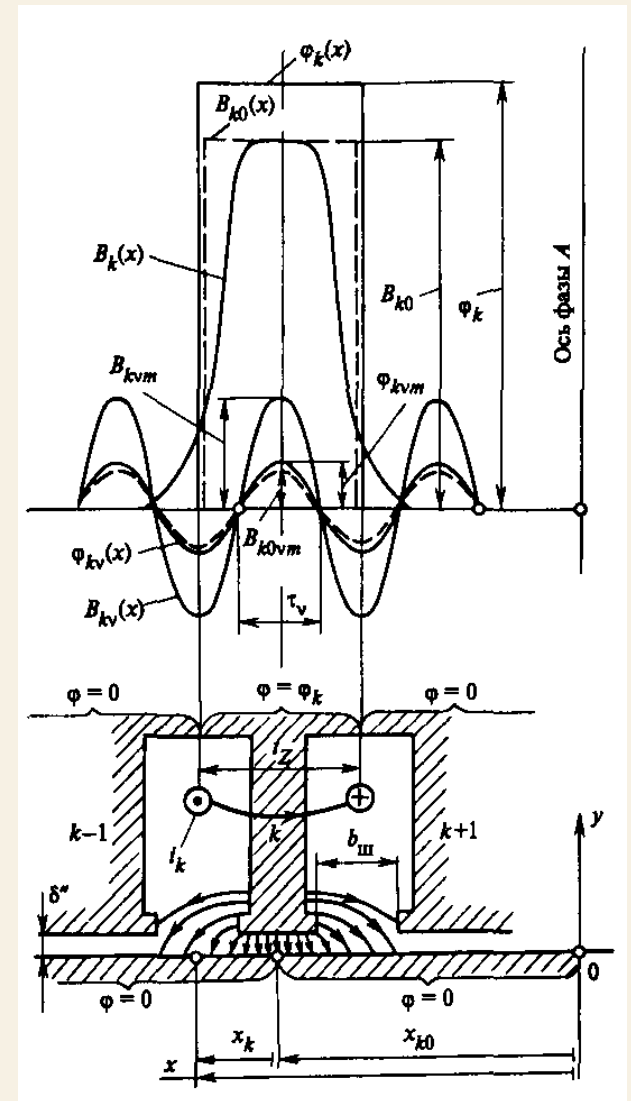
Если предположить идеализированную кривую индукции  $B_{k0}$ , (пусть ее ширина равна  $t_z$ , как у МДС, а амплитуда  $B_{k0} = \mu_0 F_k / \delta$ ), то ее  $v$  гармоники  $B_{k0v}$  будут иметь то же  $\tau_v$  и другую амплитуду  $B_{k0vm}$

Гармоники прямоугольной волны  $B_{k0}$  легко найти

$$B_{k0vm} = \frac{\mu_0 F_{kvm}}{\delta} \quad \text{где} \quad F_{kvm} = 2 \frac{i_a w_k}{v\pi} k_{yv}$$

Но они не совпадают с гармониками  $B_k$  из-за влияния пазов

$$C_v = \frac{B_{kvm}}{B_{k0vm}} \quad \text{– коэффициент пазовости для } v \text{ гармоники} \\ \text{(коэффициент влияния пазов)}$$



## Гармоники поля

Коэффициент  $C_v$  одинаков для всех  $t_z$

Величина  $C_v$  определяется геометрией зазора и  $\nu$

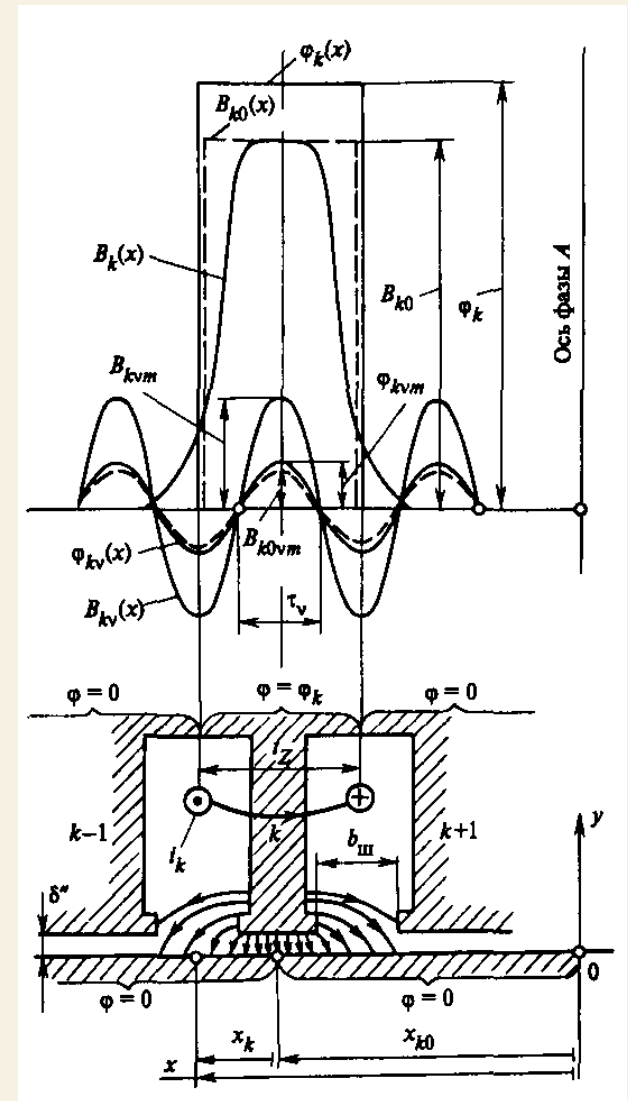
$$C_v = f\left(\frac{b_{\text{п}}}{\delta''}; \frac{b_{\text{п}}}{t_z}; \frac{Z}{\nu p}\right) \quad \text{Для } \nu = 1 \quad C_1 \approx \frac{1}{k_{\delta 1}}$$

Инженерный подход: расчет  $C_v$  находят гармоники реальной индукции через гармоники идеализированной индукции

$$B_{k\nu m} = B_{k0\nu m} C_v = \frac{\mu_0 F_{k\nu m}}{\delta} C_v$$

Коэффициент пазовости  $C_v$ :

- по таблицам (номограммам) заранее рассчитанных значений в книгах по проектированию ЭМ
- по приближенной методике расчета в учебнике Иванова-Смоленского А.В. Электрические машины. Том 1. с.321



## Гармоники поля

Итак, можем найти гармоники индукции поля от относительных МДС зубцовых контуров

$$B'_{kvm} = \frac{\mu_0 F'_{kvm}}{\delta} C_v$$

Гармонику поля фазы найдем как сумму  $v$  гармоник полей зубцовых контуров

$$B_{\phi v} = B_{\phi vm} \cos \frac{v\pi x}{\tau} = \sum_{k=1}^y B'_{kvm} \cos \frac{v\pi x_k}{\tau}$$

Поскольку оси ЗК сдвинуты в пространстве на  $v\gamma$ , используем векторную сумму комплексных амплитуд

$$\dot{B}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \dot{B}'_{kvm}$$

Комплексная амплитуда  $v$  гармоники поля  $k$  зубцового контура  $\dot{B}'_{kvm} = \frac{\mu_0 \dot{F}'_{kvm}}{\delta} C_v$

Тогда  $\dot{B}_{\phi vm} = \sum_{k=1}^y \frac{\mu_0 \dot{F}'_{kvm}}{\delta} C_v = \frac{\mu_0}{\delta} C_v \sum_{k=1}^y \dot{F}'_{kvm} = \frac{\mu_0}{\delta} C_v \dot{F}_{\phi vm}$

Т.о. амплитуда  $v$  гармоники поля фазы  $B_{\phi vm} = \frac{\mu_0 F_{\phi vm}}{\delta} C_v = \frac{2(i_a w_k) k_{yv} \mu_0 C_v}{v\pi\delta}$

Просуммировав все гармоники, получим кривую индукции полного поля фазы  $B_{\phi} = \sum_{v=1}^{\infty} B_{\phi v}$

# Фаза простой обмотки с произвольным $q$

Рассмотрим фазу простой многофазной двухслойной обмотки, имеющей  $q$  катушек в катушечной группе

Представим ее как совокупность  $q$  элементарных фаз, имеющих  $q = 1$ , одинаковый шаг  $y$  и смещенных на  $t_z$

Каждая элементарная фаза  $n$  создает МДС  $F_\phi^n$

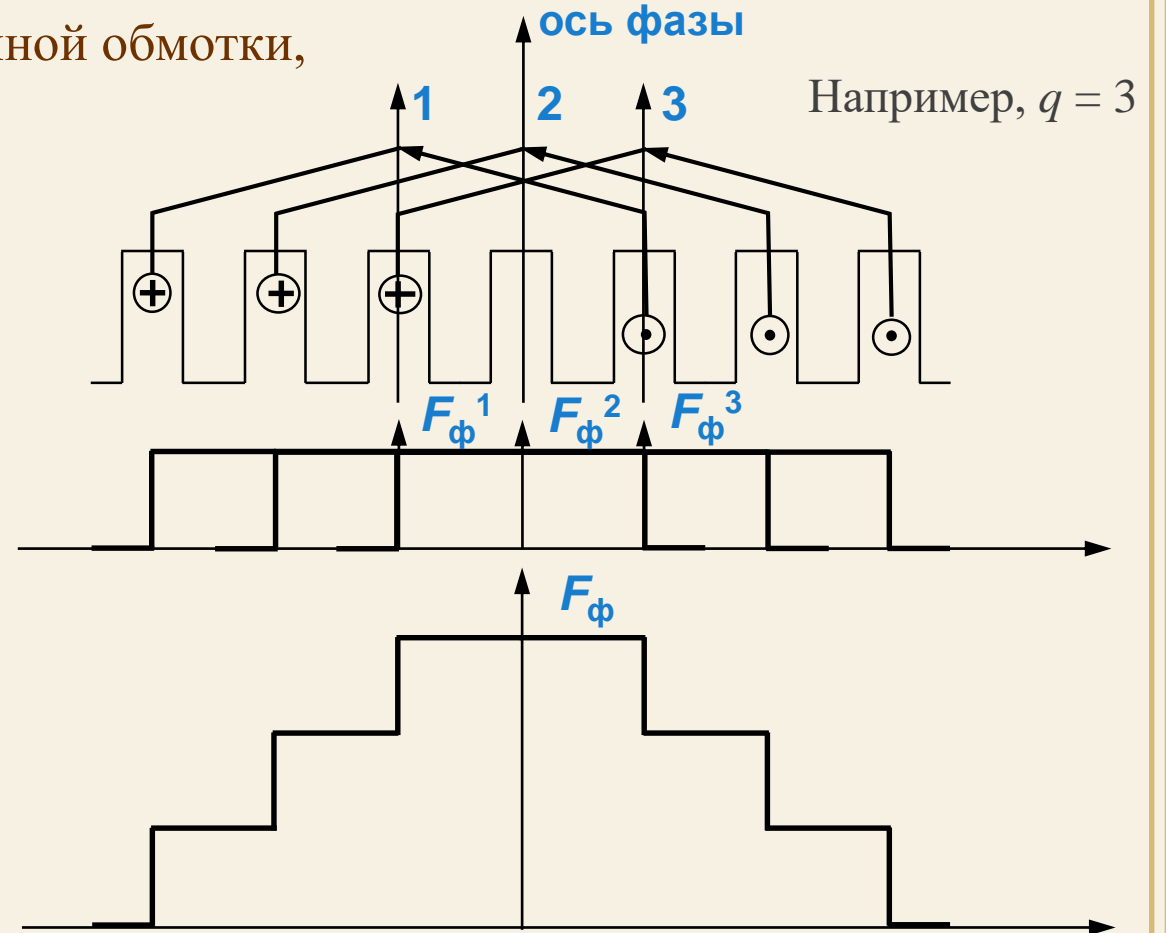
Полная МДС фазы  $F_\phi = F_\phi^1 + F_\phi^2 + F_\phi^3 = \sum_{n=1}^q F_\phi^n$

Каждая МДС  $F_\phi^n$  раскладывается на гармоники

$$F_{\phi v}^n = F_{\phi v m}^n \cos \frac{v\pi x_n}{\tau}$$

Гармоника МДС фазы может быть собрана из гармоник элементарных фаз

$$F_{\phi v} = F_{\phi v m} \cos \frac{v\pi x}{\tau} = \sum_{n=1}^q F_{\phi v}^n$$



## Фаза простой обмотки с произвольным $q$

Все  $\nu$  гармоники МДС элементарных фаз одинаковы, но смещены в пространстве на  $t_z$  (или на эл. угол  $\nu\gamma$  по  $\nu$  гармонике)

Для правильного суммирования  $\nu$  гармоник МДС элементарных фаз воспользуемся векторной суммой их комплексных амплитуд

$$\dot{F}_{\phi\nu m} = \sum_{n=1}^q \dot{F}_{\phi\nu m}^n$$

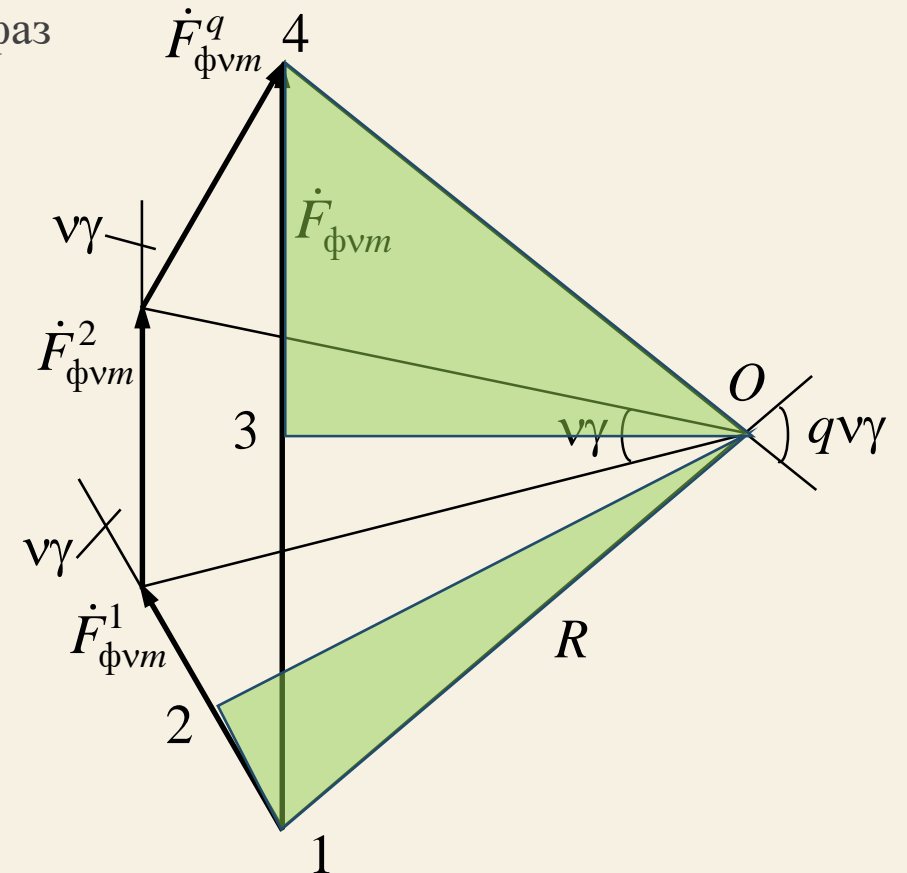
Впишем вектора в окружность радиусом  $R$

Из треугольника 012:  $F_{\phi\nu m}^n = 2R \sin \frac{\nu\gamma}{2}$

Из треугольника 034:  $F_{\phi\nu m} = 2R \sin \frac{q\nu\gamma}{2}$

Тогда  $F_{\phi\nu m} \sin \frac{\nu\gamma}{2} = F_{\phi\nu m}^n \sin \frac{q\nu\gamma}{2}$

Т.о. амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы  $F_{\phi\nu m} = F_{\phi\nu m}^n \frac{\sin \frac{q\nu\gamma}{2}}{\sin \frac{\nu\gamma}{2}}$



## Фаза простой обмотки с произвольным $q$

Перепишем амплитуду  $\nu$  гармоники МДС фазы

$$F_{\phi\nu m} = F_{\phi\nu m}^n \frac{\sin \frac{q\nu\gamma}{2}}{\sin \frac{\nu\gamma}{2}} = F_{\phi\nu m}^n q \frac{\sin \frac{q\nu\gamma}{2}}{q \sin \frac{\nu\gamma}{2}} = F_{\phi\nu m}^n q k_{pv}$$

где  $k_{pv}$  – обмоточный коэффициент распределения по  $\nu$  гармонике

$$k_{pv} = \frac{\sin \frac{q\nu\gamma}{2}}{q \sin \frac{\nu\gamma}{2}} \quad \text{или в} \quad k_{pv} = \frac{\sin \frac{q\nu\pi t_z}{2\tau}}{q \sin \frac{\nu\pi t_z}{2\tau}} \quad \text{для} \quad k_{pv} = \frac{\sin \frac{q\nu\pi t_z}{m'q}}{q \sin \frac{\nu\pi t_z}{m'q}} = \frac{\sin \frac{\nu\pi t_z}{m'}}{q \sin \frac{\nu\pi t_z}{m'q}}$$

зубцовых делениях      простой обмотки

Коэффициент распределения  $k_{pv} = \frac{F_{\phi\nu m}}{qF_{\phi\nu m}^n}$  показывает уменьшение МДС фазы по сравнению с алгебраической суммой МДС элементарных фаз

При распределении обмотки по пазам  $k_{pv} < 1$  даже для основной гармоники

## Фаза простой обмотки с произвольным $q$

Итак, амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы обмотки с произвольным  $q$

$$F_{\phi\nu m} = F_{\phi\nu m}^n q k_{p\nu} = \frac{2(i_a w_k) k_{y\nu}}{\nu\pi} q k_{p\nu}$$

Заметим, что число витков в фазе простой обмотки

$$w' = \frac{w_k q p}{a}$$

тогда  $w_k = \frac{a w'}{q p}$  и выражение можно переписать

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2(i_a a) w'}{\nu\pi p} k_{y\nu} k_{p\nu}$$

Т.к.  $i_a = i / a$ , амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы запишется как

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2i w'}{\nu\pi p} k_{y\nu} k_{p\nu}$$

Теперь для любой простой обмотки с произвольным  $q$  можно определить:

Полная МДС фазы

$$F_{\phi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_{\phi\nu m} \cos \frac{\nu\pi x}{\tau}$$

Индукция магнитного поля фазы

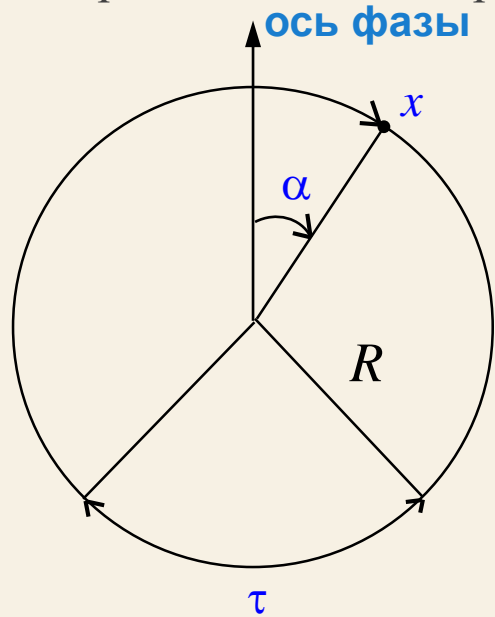
$$B_{\phi} = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\phi\nu m} \cos \frac{\nu\pi x}{\tau} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mu_0 F_{\phi\nu m} C_{\nu}}{\delta} \cos \frac{\nu\pi x}{\tau}$$

# Гармоника как волна

Выражения для гармоник МДС и индукции во вращающихся машинах удобно записать через угловые координаты

Например,  $\nu$  гармоника МДС фазы  $F_{\phi\nu} = F_{\phi\nu m} \cos \frac{\nu\pi x}{\tau}$

На средней линии зазора  $x = \alpha R$ ,  $2\pi R = 2p\tau \rightarrow \tau = \frac{2\pi R}{2p}$



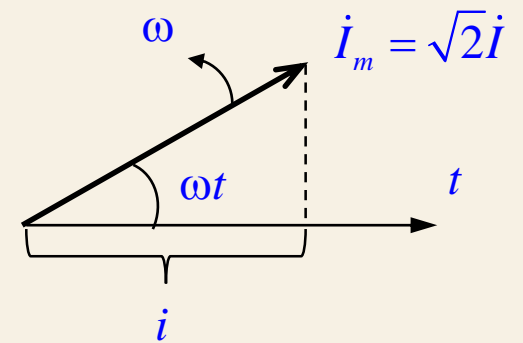
Тогда  $\cos \frac{\nu\pi x}{\tau} = \cos \left( \frac{\nu\pi\alpha R}{2\pi R} 2p \right)$   
 $= \cos \nu p \alpha = \cos \nu \alpha_1$

При этом амплитуда  $\nu$  гармоники МДС фазы

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2i\nu'}{\nu\pi p} k_{y\nu} k_{p\nu}$$

Здесь  $i$  – мгновенное значение тока фазы

$$i = \sqrt{2}I \cos \omega t$$



Т.е.  $F_{\phi\nu} = \frac{2\sqrt{2}I\nu'k_{y\nu}k_{p\nu}}{\nu\pi p} \cos \omega t \cos \nu p \alpha$



## Гармоника как волна

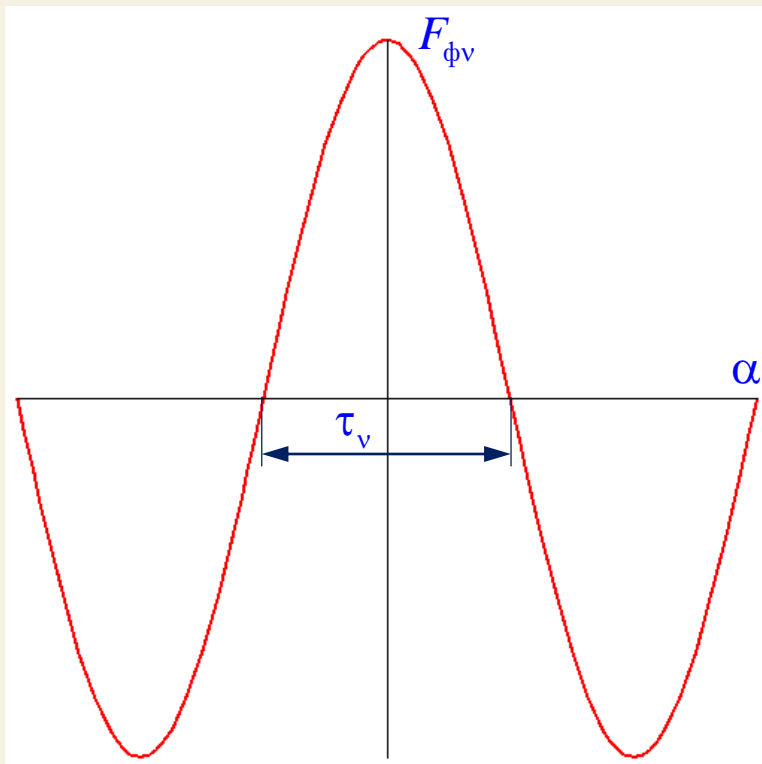
Итак,  $\nu$  гармоника МДС фазы записывается как

$$F_{\phi\nu} = F_{\phi\nu m} \cos \omega t \cdot \cos \nu p \alpha$$

$$F_{\phi\nu m} = \frac{2\sqrt{2}Iw'k_{y\nu}k_{p\nu}}{\nu\pi r}$$

изменение  
во времени  
(max при  $t = 0$ )

изменение  
в пространстве  
(max на оси фазы  
при  $\alpha = 0$ )



Это уравнение пульсирующей волны

- при изменении тока изменяется величина МДС, но пространственное распределение сохраняется
- ось волны МДС неподвижна в пространстве (совпадает с осью фазы)

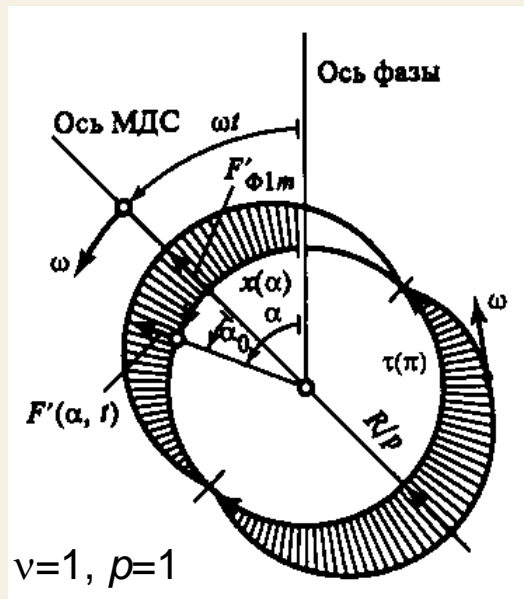
## Гармоника как волна

Выражение для пульсирующей волны МДС можно переписать так

$$F_{\phi v}(\alpha, t) = F_{\phi v m} \cos \omega t \cdot \cos v p \alpha = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha) = F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t) + F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t)$$

Здесь  $F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t)$  – прямо-вращающаяся волна МДС

$F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t)$  – обратно-вращающаяся волна МДС

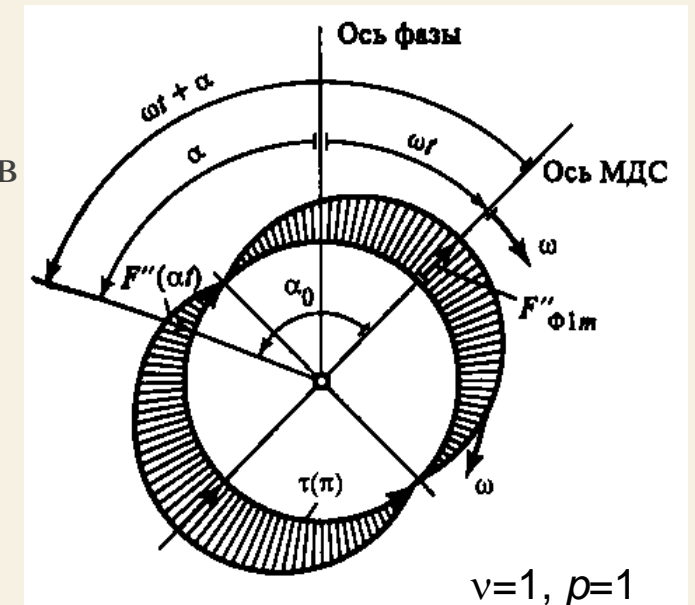


Ось прямой МДС вращается в сторону «+» углов с угловой скоростью  $\Omega_v^{\text{пр}} = \omega / v p$

Ось обратной МДС вращается в сторону «-» углов с угловой скоростью  $\Omega_v^{\text{обр}} = -\omega / v p$

Амплитуды волн равны  $F_{\phi v m}^{\text{пр}} = F_{\phi v m}^{\text{обр}} = \frac{1}{2} F_{\phi v m}$

Пространственное распределение волны относительно оси МДС неизменно (cos) → неизменная волна вращается в пространстве

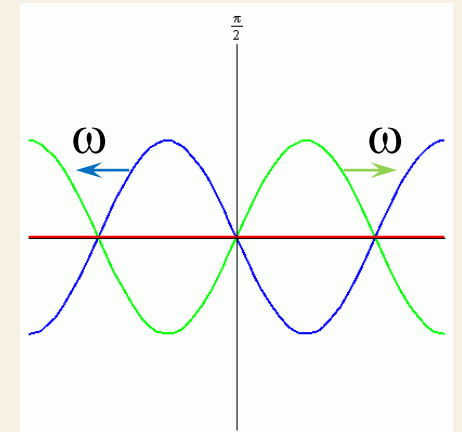
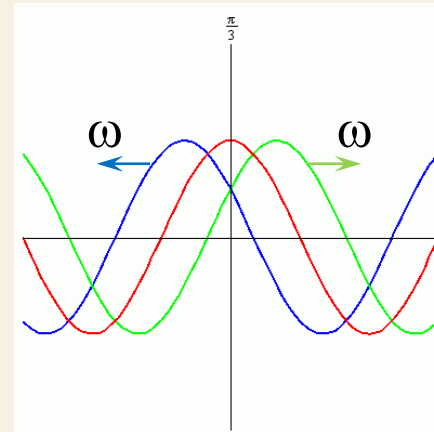
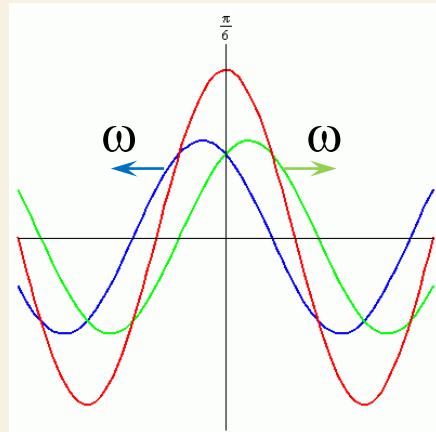
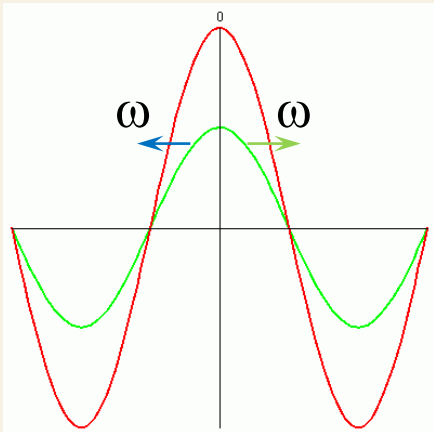


## Гармоника как волна

При  $t = 0$  обе волны совпадают в пространстве с осью фазы  
Их сумма дает максимальную пульсирующую волну МДС

С течением времени волны движутся  
в противоположные стороны  
с одинаковыми скоростями  $\rightarrow$  их сумма  
всегда дает  $\cos$  с максимумом на оси фазы

При  $\omega t = \pi/2$  волны находятся  
в противофазе, их сумма = 0



Угловая скорость в электрических град.

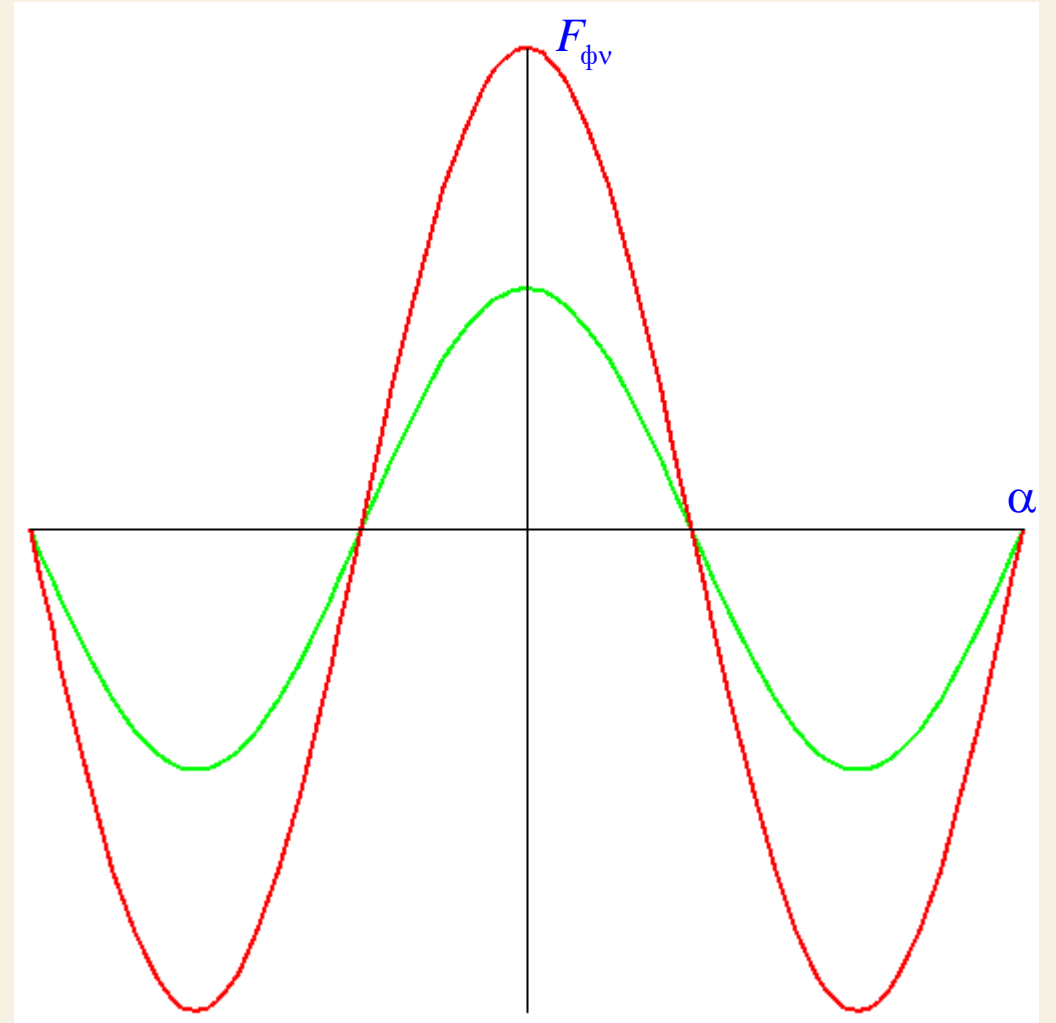
$$\omega_v^{\text{пр}} = \Omega_v^{\text{пр}} p = \frac{\omega_1}{v}$$

$$\omega_v^{\text{обр}} = \Omega_v^{\text{обр}} p = -\frac{\omega_1}{v}$$

## Гармоника как волна

Разложение пульсирующей волны МДС  
на прямую и обратные волны

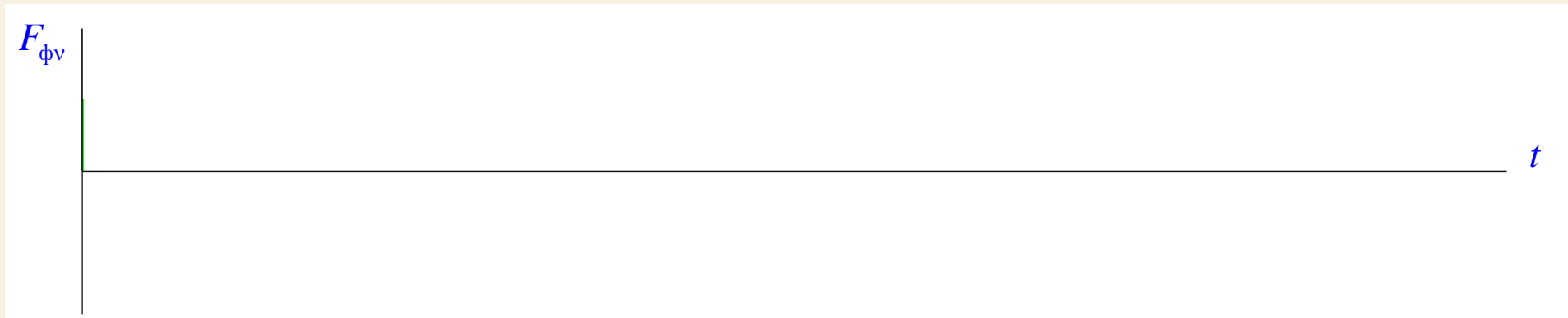
$$F_{\phi v} = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - \nu p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + \nu p \alpha)$$



## Гармоника как волна

Разложение пульсирующей волны МДС на прямую и обратные волны

$$F_{\phi v} = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) + \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha)$$



Прямо-вращающаяся волна МДС фазы  $F_{\phi v}^{\text{пр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha)$

Обратно-вращающаяся волна МДС фазы  $F_{\phi v}^{\text{обр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t + v p \alpha)$

Если принять, что для прямой волны  $v$  положительно, а для обратной волны  $v$  отрицательно, то обе волны можно описать одним уравнением

$$F_{\phi v}^{\text{вр}}(\alpha, t) = \frac{1}{2} F_{\phi v m} \cos(\omega t - v p \alpha) \quad \text{где } v = -\infty \dots -2; -1; 0; +1; +2 \dots +\infty$$

$$\text{Угловая скорость } \Omega_v = \frac{\omega}{v p}$$

# Простая многофазная обмотка

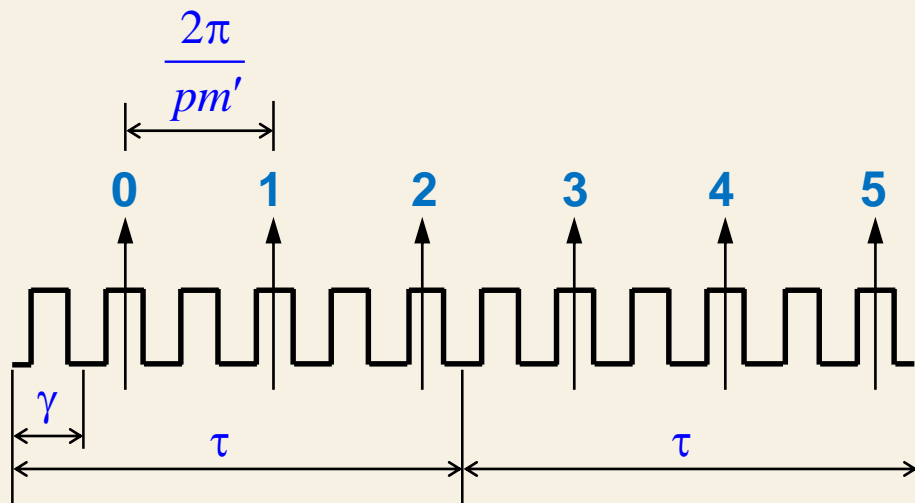
Рассмотрим простую многофазную двухполюсную обмотку с числом фаз  $m'$ , питаемую симметричной системой токов  $i_n = \sqrt{2}I \cos \omega t_n$

Например,  $m' = 6$ ,  $q = 2$  и  $p = 1$

Число зубцов на периоде  $z = pm'q = 12$ , полюсное деление  $\tau = m'q / 2 = 6$

Угловой размер зубцового деления  $\gamma = \frac{2\pi}{z}$

Угол сдвига между соседними фазами  $\gamma_{nn+1} = \frac{2\pi}{pm'} = \frac{2\pi}{6}$



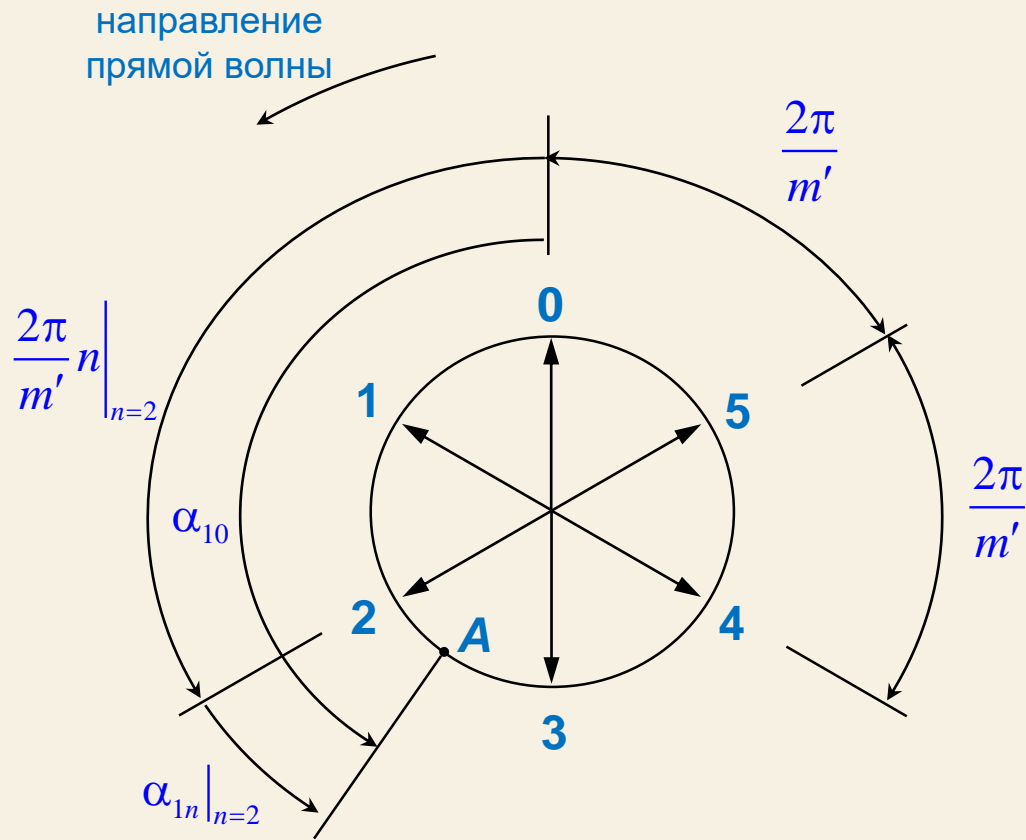
Для каждой фазы  $n$  известны гармоники МДС (и поля) в системе координат фазы  $n$

$$F_{nv}^{\text{вр}} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos(\omega t_n - v p \alpha_n)$$

Надо просуммировать МДС всех фаз, приведя к единой системе координат

## Простая многофазная обмотка

Расположение фаз в пространственной плоскости (относительно фазы 0)



Рассматриваем электрические углы (для  $p = 1$ )

Угловое положение точки  $A$  в системе координат фазы  $n \rightarrow \alpha_{1n}$  (пусть  $n = 2$ )

(первый индекс 1 – эл. угол по 1 гармонике, второй индекс  $n$  – номер фазы)

Угловое положение точки  $A$  в системе координат фазы 0  $\rightarrow \alpha_{10}$

Угол между фазами 0 и  $n$   $\frac{2\pi}{m'}n$

Приведем координату  $\alpha_{1n}$  к системе координат фазы 0

$$\alpha_{1n} = \alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'}n$$

## Простая многофазная обмотка

Расположение фаз во временной плоскости (относительно фазы 0)

Обеспечим правильное чередование фаз для прямой волны  
(относительно неподвижной оси времени  $t$ )

Мгновенное значение фазного тока

→ проекция вектора фазного тока на ось времени  $t$

$$i_n = \sqrt{2}I \cos \omega t_n$$

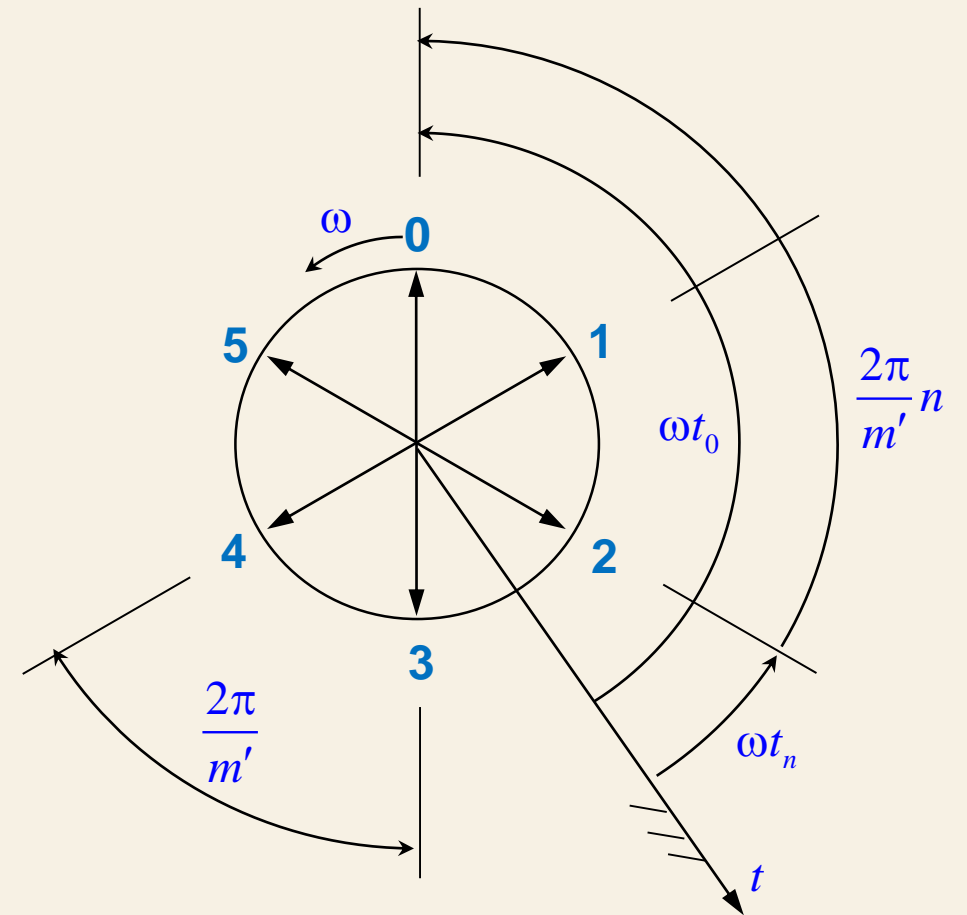
здесь  $t_n$  – временная координата фазы  $n$

Фаза тока  $n$  в системе координат фазы  $n$        $\omega t_n$   
(относительно момента времени, когда ток фазы  $n$  максимален)

Фаза тока 0 в системе координат фазы 0       $\omega t_0$   
(относительно момента времени, когда ток фазы 0 максимален)

Приведем фазу тока  $n$  к системе координат фазы 0

$$\omega t_n = \omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n$$





## Простая многофазная обмотка

Приведем гармоники каждой фазы  $n$  к системе координат фазы 0

$$F_{nv}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos(\omega t_n - \nu \alpha_{1n})$$

$$F_{nv}^{\text{BP}} = \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos\left(\left(\omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n\right) - \nu\left(\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n\right)\right)$$

Полная МДС всей обмотки по  $\nu$  гармонике равна сумме  $\nu$  гармоник МДС всех фаз

$$\begin{aligned} F_{\nu} &= \sum_{n=0}^{m'-1} F_{nv}^{\text{BP}} = \sum_{n=0}^{m'-1} \frac{1}{2} F_{\phi vm} \cos\left(\left(\omega t_0 - \frac{2\pi}{m'} n\right) - \nu\left(\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} F_{\phi vm} \sum_{n=0}^{m'-1} \cos\left(\omega t_0 - \nu \alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n(1 - \nu)\right) \end{aligned}$$

Или в комплексной форме  
– векторная сумма  $\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{nvm}^{\text{BP}}$

Для разных гармоник  $\nu$  аргументы  $\cos$  оказываются разными за счет слагаемого  $\frac{2\pi}{m'} n(1 - \nu)$

Рассмотрим возможные варианты

## Простая многофазная обмотка

**Вариант 1:** пусть  $\nu$  таково, что  $\frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) = 2\pi \times (\text{целое число})$

Т.е.  $\frac{(1-\nu)}{m'} = (\text{целое число})$  или  $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$

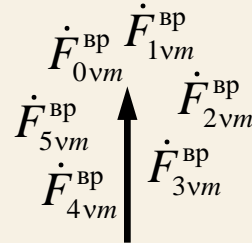
Тогда в силу периодичности  $\cos$ :  $\cos\left(\omega t_0 - \nu\alpha_{10} - \frac{2\pi}{m'} n(1-\nu)\right) = \cos(\omega t_0 - \nu\alpha_{10})$  Это справедливо для любой фазы  $n$

Т.е. все такие  $\nu$  гармоники всех фаз совпадают в пространстве и вектор  $\nu$  гармоники МДС простой многофазной обмотки равен простой сумме векторов  $\nu$  гармоник МДС всех фаз

Результирующая МДС обмотки  $F_\nu = m' \frac{F_{\phi\nu m}}{2} \cos(\omega t_0 - \nu\alpha_{10}) = F_{\nu m} \cos(\omega t - \nu\alpha_1)$  где  $F_{\nu m} = \frac{\sqrt{2}m'Iw'k_{y\nu}k_{p\nu}}{\nu\pi r}$

Например, для обмотки с  $m' = 6$  для всех  $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$  (т.е.  $\nu = 1; -5; +7; -11; +13\dots$ )

$$\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{\text{BP}} = 6 \cdot \dot{F}_{n\nu m}^{\text{BP}}$$



Аналогично, для КЗ обмотки ротора с 13 стержнями ( $z = 13, m' = 13$ ) для всех  $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$  (т.е.  $\nu = 1; -12; +14; -25; +27\dots$ )

$$\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{\text{BP}} = 13 \cdot \dot{F}_{n\nu m}^{\text{BP}}$$

## Простая многофазная обмотка

**Вариант 2:** пусть  $\nu$  таково, что  $\frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) \neq 2\pi \times (\text{целое число})$  Т.е.  $\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$

Тогда векторы МДС соседних фаз  $n$  и  $n+1$  расположены под углом

$$\alpha_{nn+1\nu} = \frac{2\pi}{m'} (n+1)(1-\nu) - \frac{2\pi}{m'} n(1-\nu) = \frac{2\pi}{m'} (1-\nu)$$

(одинаковый угол между любыми парами соседних фаз)

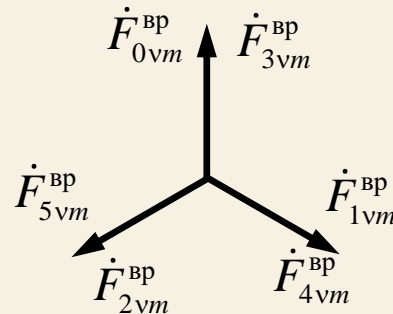
Этот угол кратен углу сдвига между фазами и векторы  $\nu$  гармоник МДС всех фаз образуют симметричную звезду векторов

*Сумма векторов которой всегда равна 0*

Например, для обмотки с  $m' = 6$

$\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$  соответствует  $\nu = -1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 5; -7; \pm 8 \dots$

для  $\nu = -1$   $\alpha_{nn+1\nu} = \frac{2\pi}{3}$



Т.е. гармоники порядка  $\nu \neq 1 + m' \times (\text{целое число})$  простой многофазной обмоткой не создаются!

при этом  $\dot{F}_{\nu m} = \sum_{n=0}^{m'-1} \dot{F}_{n\nu m}^{BP} = 0$

## Простая многофазная обмотка

Итак, простая многофазная обмотка создает гармоники МДС  $F_v = F_{vm} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$

порядка  $\nu = 1 + m' \times (\text{целое число})$

где амплитуда  $\nu$  гармоники результирующей МДС  $F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m' I w' k_{yv} k_{pv}}{\nu \pi r}$

Эти гармоники вращаются с угловой скоростью  $\Omega_\nu = \frac{\omega}{\nu p}$   
(направление вращения определяется знаком  $\nu$ )

Каждая гармоника МДС создает соответствующую гармонику индукции  $B_\nu = B_{\nu m} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$   
результирующего магнитного поля

где амплитуда  $\nu$  гармоники индукции  $B_{\nu m} = \frac{\mu_0 F_{vm} C_\nu}{\delta}$

Полная МДС простой обмотки  $F = \sum_\nu F_\nu$

Кривая индукции результирующего поля  $B = \sum_\nu B_\nu$

# Сложная многофазная обмотка

Сложная многофазная обмотка имеет на каждом периоде по две катушечные группы, соединенные встречно

Сложная многофазная обмотка с числом фаз  $m$  может быть представлена *эквивалентной* простой обмоткой с числом фаз  $m' = 2m$ , имеющей такие же катушки:  $q' = q$ ,  $w'_k = w_k$ ,  $p' = p$ ,  $a' = a$ ,  $y' = y$

Если распределение токов по пазам одинаково, то и результирующая МДС и поле одинаковы

Например, сложная обмотка с  $m = 3$ ,  $q = 2$  и  $p = 1$

Число зубцов на периоде  $z = 2pmq = 12$

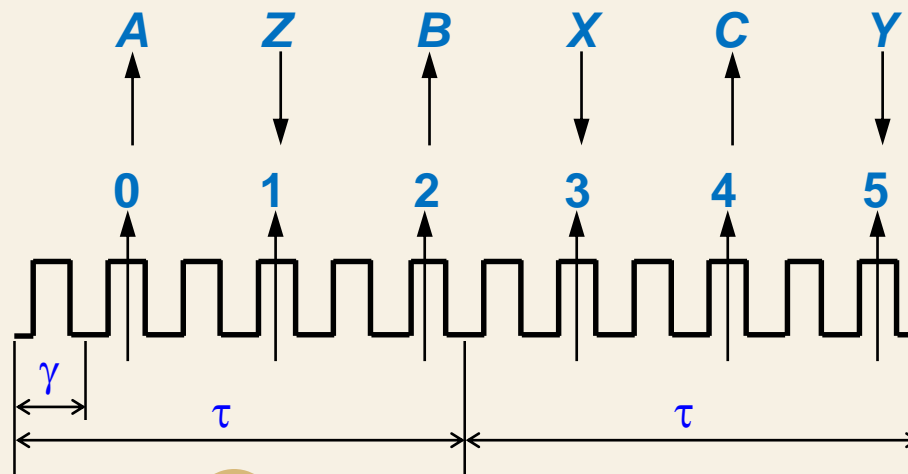
Полусное деление  $\tau = z / 2p = 6$

Угловой размер зубцового деления

$$\gamma = \frac{2\pi}{z}$$

Угол сдвига между соседними фазами

$$\gamma_{nn+1} = \frac{2\pi}{pm} = \frac{2\pi}{3}$$



Катушечные группы сложной обмотки

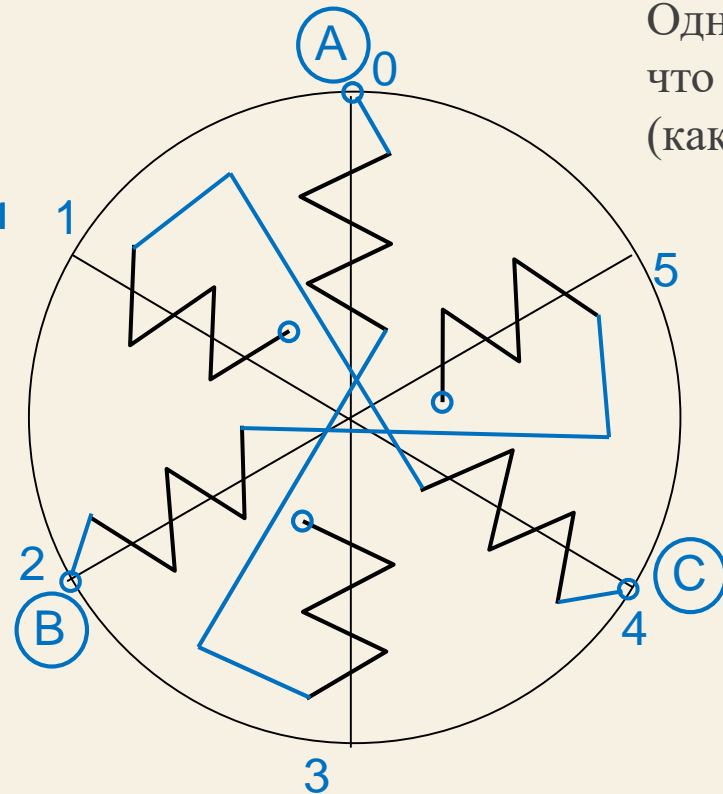
Фазы эквивалентной простой обмотки

Катушечные группы совпадают

## Сложная многофазная обмотка

Фаза сложной обмотки (две катушечные группы, включенные встречно) образована из двух фаз эквивалентной простой обмотки (по одной катушечной группе в каждой), смещенных на  $\pi$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 + 3 \\ B &\rightarrow 2 + 5 \\ C &\rightarrow 4 + 7 \end{aligned}$$



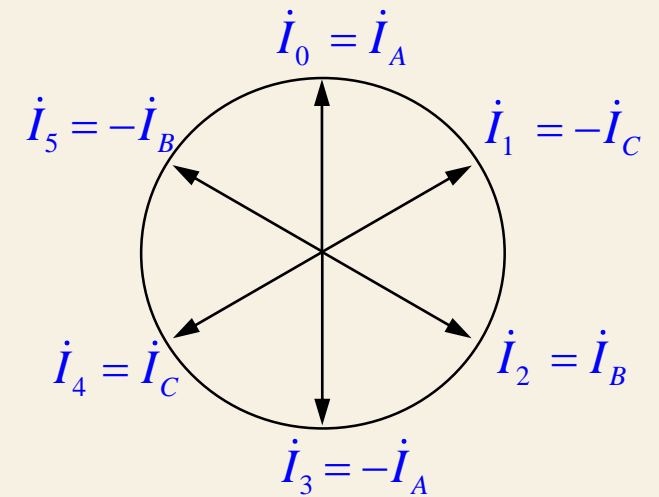
пространственная плоскость

Одна из фаз эквивалентной простой обмотки питается тем же током, что и фаза сложной обмотки, а другая – током, смещенным на  $\pi$  (как и во встречно включенной катушечной группе)

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 0 + 3 \\ B &\rightarrow 2 + 5 \\ C &\rightarrow 4 + 7 \end{aligned}$$

Число последовательно соединенных витков в фазе

$$w = \frac{2pqw_k}{a} \quad w' = \frac{p'q'w'_k}{a'} = \frac{w}{2}$$



временная плоскость

## Сложная многофазная обмотка

Если для сложной обмотки существует эквивалентная простая, то сложная обмотка создает такие же гармоники МДС и поля, что и эквивалентная простая обмотка

$$F_v \Big|_{\text{сложная}} = F_v \Big|_{\text{простая}} = F_{vm} \cos(\omega t - \nu p \alpha)$$

где амплитуда МДС  $F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m' I w' k_{yv} k_{pv}}{\nu \pi p} \quad \left[ \begin{array}{l} m' = 2m \\ w' = w / 2 \end{array} \right] \quad F_{vm} = \frac{\sqrt{2} m I w k_{yv} k_{pv}}{\nu \pi p}$

Гармонический состав сложной обмотки

$$\nu = 1 + m' \times (\text{целое число}) \rightarrow \nu = 1 + 2m \times (\text{целое число})$$

Сложная обмотка создает только нечетные гармоники!

Например, гармоники сложной обмотки с  $m = 3$      $\nu = 1; -5; +7; -11; +13 \dots$

гармоники сложной обмотки с  $m = 2$      $\nu = 1; -3; +5; -7; +9 \dots$

гармоники простой обмотки с  $m' = 3$      $\nu = 1; -2; +4; -5; +7 \dots$

# Классификация высших гармонических

Обмоточные коэффициенты различаются для разных  $\nu$   
 – порядок гармоники входит в формулу  $k_{y\nu}$  и  $k_{p\nu}$

Существует закономерность в значениях обмоточных коэффициентов для разных  $\nu$

Представим номер гармоники  $\nu = 1 + 2m \times (\text{целое число})$  в виде  $\nu = 1 + 2m(j + qs)$

где  $j = 0; 1; 2 \dots q-1$ ,  $s$  – целое число  $(0; \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty)$

Тогда коэффициент укорочения

$$k_{y\nu} = \sin \frac{\nu \pi y}{2\tau} = \sin \frac{\nu \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj + 2mqs) \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj) \pi y + 2mqs \pi y}{2mq} = \sin \frac{(1 + 2mj) \pi y}{2mq} \quad (\text{по модулю})$$

т.к.  $\frac{2mqs \cdot \pi y}{2mq}$  равно целому числу  $\pi$

Аналогично, коэффициент распределения

$$k_{p\nu} = \frac{\sin \frac{\nu \pi}{2m}}{q \sin \frac{\nu \pi}{2mq}} = \frac{\sin \frac{\pi(1 + 2mj + 2mqs)}{2m}}{q \sin \frac{\pi(1 + 2mj + 2mqs)}{2mq}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2m}}{q \sin \frac{\pi(1 + 2mj)}{2mq}} \quad (\text{по модулю})$$

Обмоточные коэффициенты не зависят от  $s$ , но различаются для разных  $j$



## Классификация высших гармонических

С учетом значений обмоточных коэффициентов различают первоначальные и сопутствующие гармоники

**Первоначальные** гармоники – гармоники порядка  $\nu_{j0} = 1 + 2mj$ , где  $j = 0; 1; 2 \dots q-1, s = 0$

Например, для обмотки с  
 $m = 3, q = 3, y = 7$

$j$	$\nu_{j0}$	$k_{ov} = k_{yv} \cdot k_{pv}$
0	$\nu_{00} = 1 + 6 \cdot 0 = 1$	$k_{o1} = 0,92$
1	$\nu_{10} = 1 + 6 \cdot 1 = 7$	$k_{o7} = 0,138$
2	$\nu_{20} = 1 + 6 \cdot 2 = 13$	$k_{o13} = 0,039$

Первоначальные гармоники могут иметь разные обмоточные коэффициенты

**Сопутствующие** гармоники – гармоники порядка  $\nu_{js} = \nu_{j0} + 2mqs$ , где  $s = \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty$

для обмотки с  
 $m = 3, q = 3, y = 7$

$j$	$\nu_{j0}$	$k_{ov}$	Сопутствующие гармоники
0	$\nu_{00} = 1$	$k_{o1} = 0,92$	-17 +19 -35 +37 ...
1	$\nu_{10} = 7$	$k_{o7} = 0,138$	-11 +25 -29 +43 ...
2	$\nu_{20} = 13$	$k_{o13} = 0,039$	-5 +31 -23 +49 ...

Сопутствующие гармоники имеют такие же обмоточные коэффициенты, как и гармоника, которой они сопутствуют

# Зубцовые гармоники

Высшие гармоники, сопутствующие основной гармонике

– **зубцовые** гармоники:  $v_z = v_{0s}$ , где  $j = 0$ ,  $s = \pm 1; \pm 2 \dots \pm \infty$

Название «зубцовые» связано с зубчатостью ЭМ

Число пар полюсов зубцовой гармоники:  $p_z = p v_z = p(1 + 2mq_s) = p + 2pmq \cdot s = p + z \cdot s$

Зубцовые гармоники имеют такой же большой обмоточный коэффициент, что и основная гармоника

Именно они вносят заметные искажения в синусоидальную МДС обмотки

→ их необходимо учитывать в расчетах

Особенно это актуально для ЭМ с малыми  $q$

– чем меньше  $v_z$ , тем больше амплитуда МДС  $F_{vz}$

Для подавления зубцовых обмоток применяют скос пазов

## Зубцовые гармоники

Скос пазов характеризуется величиной скоса

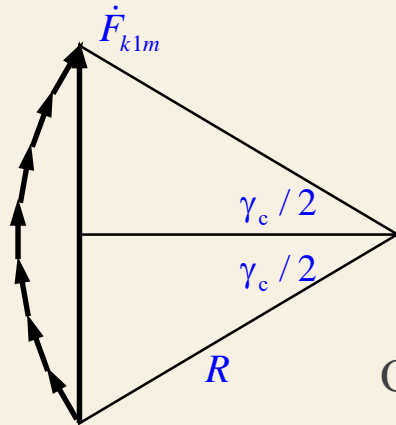
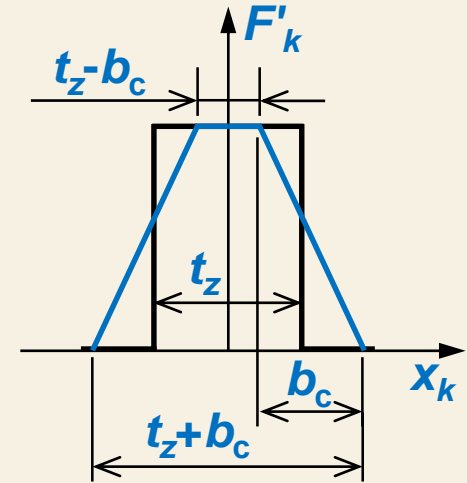
$b_c$  – расстояние по окружности сердечника между началом и концом проводника

$\gamma_{cv}$  – угол скоса по  $v$  гармонике

$$\gamma_{cv} = \frac{b_c \pi}{\tau} = \frac{b_c \pi v}{\tau}$$

В каждом поперечном сечении МДС зубцового контура остается прямоугольной с шириной  $t_z$

но ее результирующее действие на всей длине сердечника эквивалентно трапецидальной форме МДС



Представив проводник суммой отрезков, сдвинутых в пространстве, получим формулу для гармоники результирующей МДС ЗК

$$F_{kvmc} = F_{kvm} k_{cv}$$

где коэффициент скоса  $k_{cv} = \frac{\sin(\gamma_{cv} / 2)}{\gamma_{cv} / 2} = \frac{\sin(b_c \pi v / 2\tau)}{b_c \pi v / 2\tau}$

Обычно выполняют скос на 1 зубцовое деление

Например, для обмотки с  $m = 3, q = 3, y = 7$  при  $b_c = t_{z1}$

$$\gamma_c = \frac{b_c \pi v}{\tau} = \frac{1 \cdot \pi v}{mq} \quad k_{cv} = \frac{\sin(\pi v / 2mq)}{\pi v / 2mq}$$

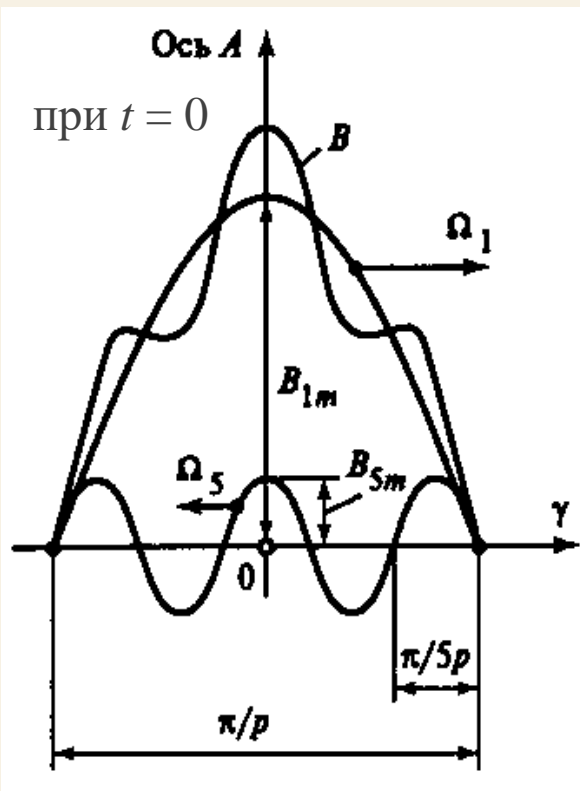
для  $v = 1$   $k_c = 0,995$

для  $v = -17$   $k_c = 0,058$

для  $v = 19$   $k_c = 0,057$

# Магнитное поле обмотки якоря

Результирующее магнитное поле в зазоре, созданное  $\sin$  токами якоря, не только движется, но и изменяет свою форму с течением времени



Это видно и на гармониках

Гармоники поля вращаются с разными геометрическими угловыми скоростями  $\Omega_v = \frac{\omega}{p_v} = \frac{\Omega_1}{v}$

Но одинаковыми электрическими  $\omega_v = \Omega_v p_v = \omega$

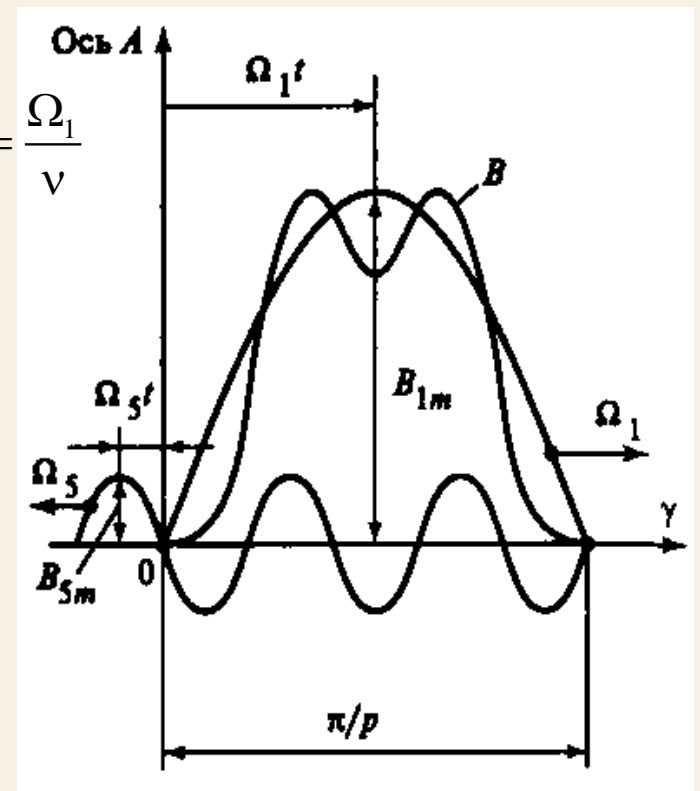
Пусть  $B = B_1 + B_5$

При  $t = \pi / 2\omega$

волна  $B_1$  сдвинется на угол  $\Omega_1 t = \frac{\omega}{p} \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2p}$

А волна  $B_5$  сдвинется на  $\Omega_5 t = \frac{\omega}{5p} \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2(5p)}$

Форма результирующей  $B$  изменится



# Магнитное поле обмотки возбуждения

Обмотки возбуждения питаются постоянным током и создают постоянное магнитное поле

Обмотки вращаются вместе с ротором и так же вращается поле возбуждения

Порядок рассмотрения МДС и индукции поля ОВ

аналогичен обмоткам переменного тока: катушки с  $iw_k \rightarrow$  волна МДС  $\rightarrow$  гармоники МДС  $\rightarrow$  гармоники поля

Поле возбуждения явнополюсной СМ – сложная форма поля даже при гладком якоре (можно рассчитать только численно)

Инженерный подход – аналогично методике Т.Г. Сорокера:

Расчет гармоник реальной индукции

через гармоники идеализированной кривой  $B(x)$

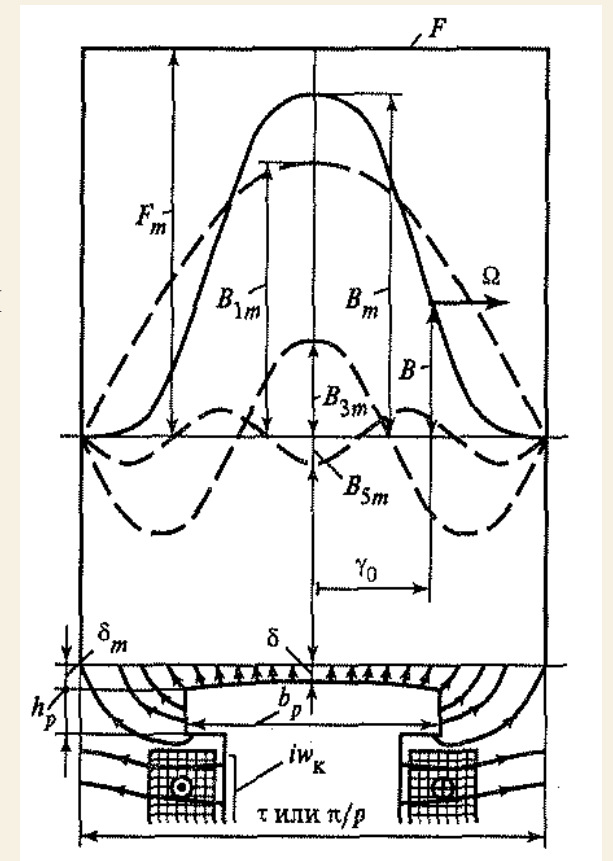
и коэффициенты поля возбуждения  $k_{fv}$

(из таблиц в зависимости от  $\alpha = b_p / \tau$ ,  $\gamma = \delta_m / \delta$ ,  $\varepsilon = \delta / \tau$ )

$$\text{Затем } B(\gamma_0) = \sum_v B_{vm} \cos(\gamma_{0v})$$

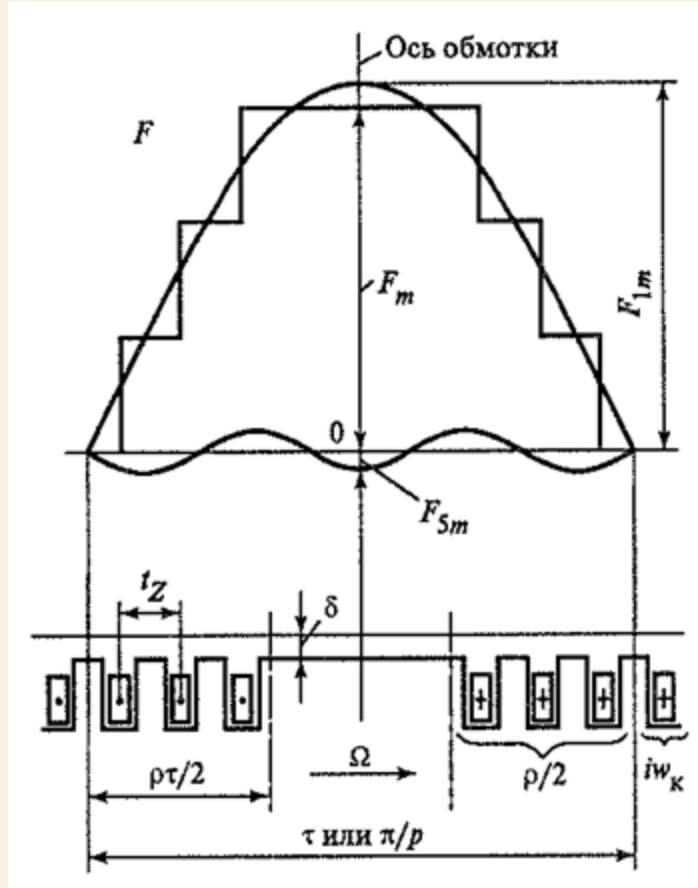
$$B_{vm} = k_{fv} B_m$$

$$\text{где } B_m = \frac{\mu_0 F_m}{\delta}$$



## Магнитное поле обмотки возбуждения

В случае неявнополюсной СМ – обычный гармонический анализ



Катушки с  $w_k \rightarrow$  ступенчатая волна МДС  $F$   
 $\rightarrow$  гармоники МДС с амплитудой

$$F_{vm} = \frac{2qk_{pv}}{\pi v} (i w_k)$$

или так  $F_{vm} = \frac{4k_{pv}}{\pi v} (i w)$  где  $w = \frac{w_k q}{2}$  – число витков ОВ (на полюс)

Коэффициент распределения  $k_{pv} = \frac{\sin \frac{qv\gamma_z}{2}}{q \sin \frac{v\gamma_z}{2}}$

$\gamma_z = \frac{\pi t_z}{\tau}$  – угловой размер зубцового деления

При равномерном зазоре гармоники индукции находят по гармоникам МДС

$$B_{vm} = \frac{\mu_0 F_{vm}}{\delta}$$

## Магнитное поле обмотки возбуждения

Особенность гармоник поля возбуждения

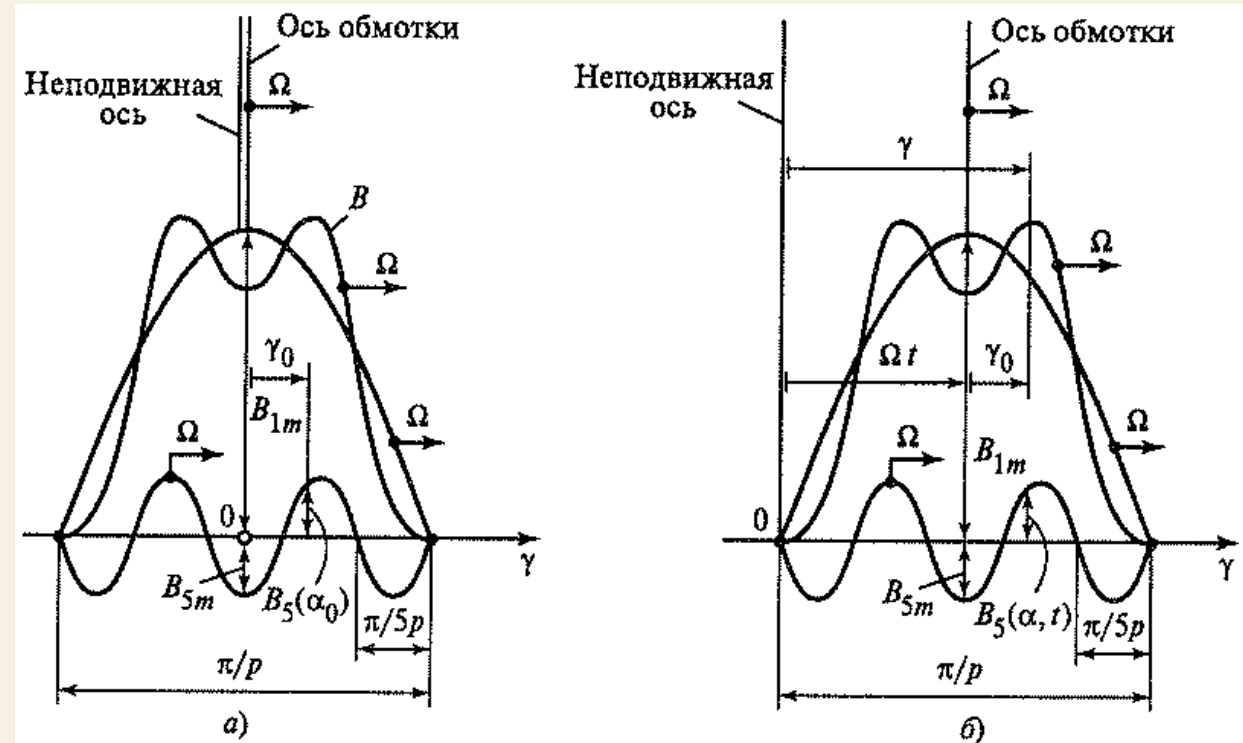
– все гармоники вращаются со скоростью вращения ротора  
(форма поля возбуждения не изменяется)

$$\Omega_v = \Omega$$

Но электрические скорости гармоник поля возбуждения оказываются различны

$$\omega_v = \Omega_v p_v = v\Omega$$

(чем больше  $v$ , тем выше скорость перемещения гармоники поля на периоде обмотки)



# Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Вращающееся поле создает переменное потокосцепление с обмоткой и наводит в ней ЭДС

Используя гармонические функции легко найти ЭДС

Рассмотрим волну основной гармоники индукции  $B = B_1$

Ось катушки  $w_k$  с шагом  $y_k$  расположена в точке  $x_k$

(в угловых величинах  $\gamma_k = x_k / R$ ,  $\gamma_y = y_k / R$ )

Волна индукции  $B$  перемещается со скоростью  $\Omega$

и в момент времени  $t$  находится в точке  $\Omega \cdot t$

Поток, сцепленный с каждым витком катушки,

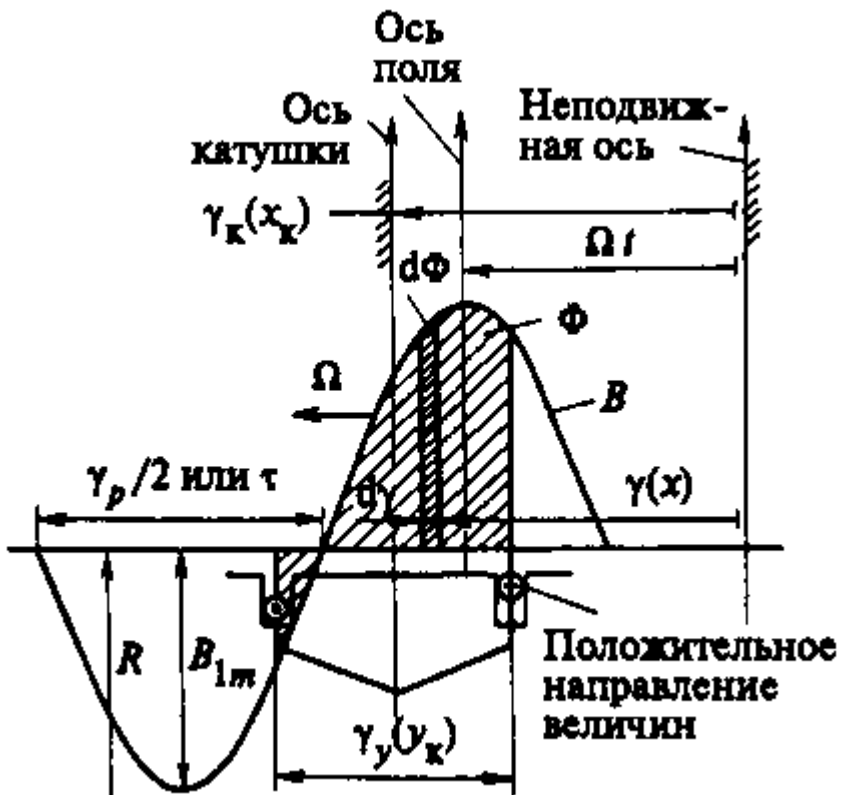
$$\Phi = \int_{S_y} B dS = \int_{S_y} d\Phi \quad \text{где } S_y = y_k l_\delta \text{ — площадь катушки}$$

Элементарный поток  $d\Phi$ ,

сцепленный с элементом катушки  $dS = l_\delta dx = l_\delta R d\gamma$ ,

может быть найден как  $d\Phi = B dS = B l_\delta R d\gamma$

на всей ширине катушки от  $\gamma_k^{\text{II}} = \gamma_k - \gamma_y / 2$  до  $\gamma_k^{\text{I}} = \gamma_k + \gamma_y / 2$





## Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Считая, что поле по длине  $l_\delta$  однородно, найдем весь поток, сцепленный с витком катушки

$$\Phi = \int_{S_y} d\Phi = \int_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}} Bl_\delta R d\gamma = l_\delta R \int_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}} B_{1m} \cos(\omega t - p\gamma) d\gamma$$

$$= \frac{B_{1m} l_\delta R}{p} \sin(\omega t - p\gamma) \Big|_{\gamma_k^{\text{II}}}^{\gamma_k^{\text{I}}}$$

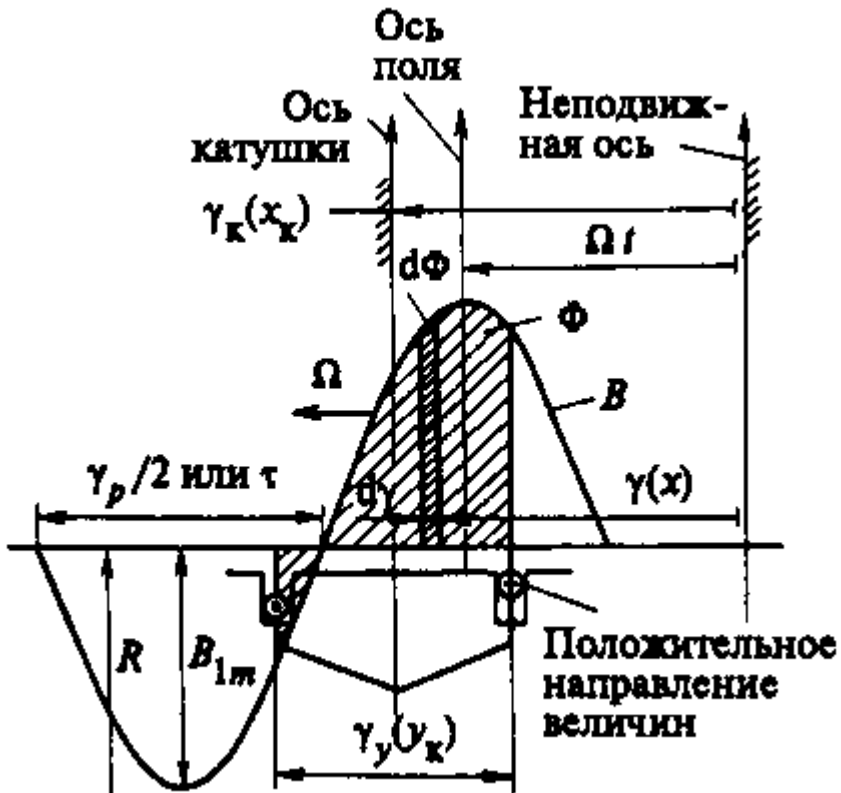
После подстановки пределов интегрирования и преобразования синусов суммы и разности углов получим

$$\Phi = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{1m} \sin \frac{\pi y_k}{2\tau} \cos(\omega t - p\gamma_k) \quad \text{или} \quad \Phi = \Phi_m k_y \cos(\omega t - \alpha_k)$$

Здесь  $\Phi_m = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{1m}$  – максимальный поток, сцепленный с катушкой без укорочения шага

$k_y = \sin \frac{\pi y_k}{2\tau}$  – коэффициент укорочения катушки

$\alpha_k = p\gamma_k$  – электрический угол положения оси катушки



## Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Потокосцепление вращающейся волны поля с катушкой, имеющей число витков  $w_k$

$$\Psi = w_k \Phi = w_k k_y \Phi_m \cos(\omega t - \alpha_k) \quad (\text{мгновенное значение})$$

ЭДС, наведенная в катушке изменяющимся потоком

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = \omega w_k k_y \Phi_m \sin(\omega t - \alpha_k) \quad \text{или} \quad e = \sqrt{2} E_k \sin(\omega t - \alpha_k)$$

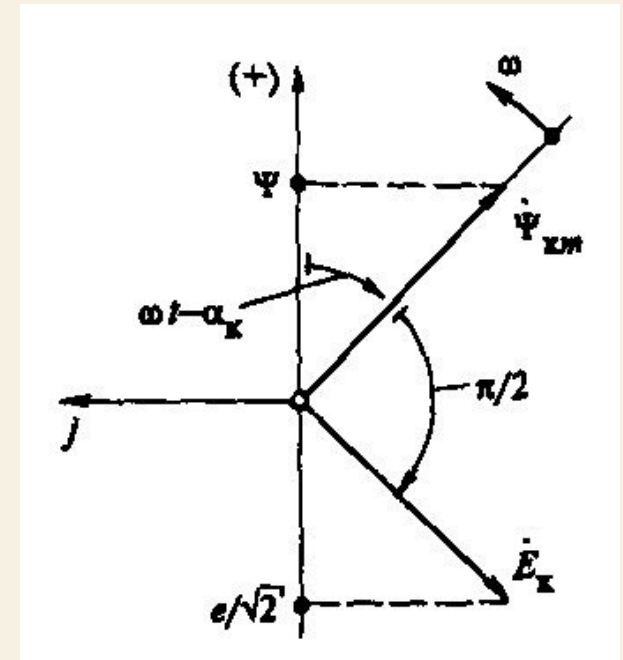
$E_k$  – действующее значение ЭДС катушки  $E_k = \frac{\omega}{\sqrt{2}} w_k k_y \Phi_m = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f w_k k_y \Phi_m$

Потокосцепление и ЭДС удобно представить в виде комплексных функций

Мгновенные значения могут быть найдены как

$$\Psi = \operatorname{Re}(\dot{\Psi}_{km}) = \operatorname{Re}(\Psi_{km} e^{j(\omega t - \alpha_k)})$$
$$e = \operatorname{Re}(\dot{E}_k) = \operatorname{Re}(\sqrt{2} E_k e^{j(\omega t - \alpha_k - \pi/2)})$$

Причем  $\dot{E}_k = -j \frac{\omega}{\sqrt{2}} \dot{\Psi}_{km}$



## Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Используя комплексные функции можно найти потокосцепление и ЭДС катушечной группы

$$\dot{\Psi}_{\Gamma m} = \sum_{i=1}^q \dot{\Psi}_{kmi} \quad \dot{E}_{\Gamma} = \sum_{i=1}^q \dot{E}_{ki} \quad \text{или} \quad \Psi_{\Gamma m} = q\Psi_{km}k_p = qw_k k_y k_p \Phi_m, \quad E_{\Gamma} = qE_k k_p \quad \text{Причем} \quad \dot{E}_{\Gamma} = -j\frac{\omega}{\sqrt{2}}\dot{\Psi}_{\Gamma m}$$

где  $k_p$  – коэффициент распределения

Фаза сложной обмотки содержит  $2p$  катушечных групп, включенных встречно

Соседние группы смещены на  $\tau$

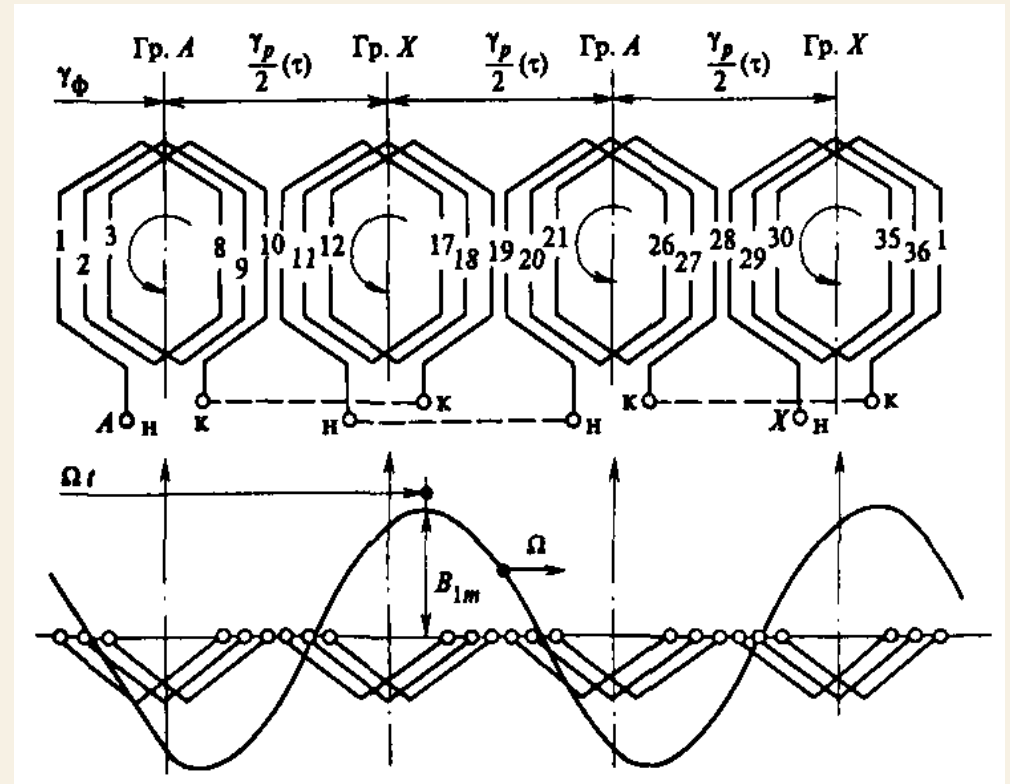
или на электрический угол половины периода  $\frac{\alpha_p}{2} = \frac{p\gamma_p}{2} = \pi$

Поэтому  $\Psi$  и  $E$  обратных катушечных групп ( $X$ ) находятся в противофазе с  $\Psi$  и  $E$  прямых катушечных групп ( $A$ )

В результате в пределах каждой параллельной ветви  $\Psi$  и  $E$  катушечных групп суммируются (алгебраически)

$$\Psi_{\phi m} = \frac{2p}{a} \Psi_{\Gamma m} = \frac{2pqw_k}{a} k_y k_p \Phi_m = wk_o \Phi_m$$

$$E_{\phi} = \frac{\omega}{\sqrt{2}} \Psi_{\phi m} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} fwk_o \Phi_m$$

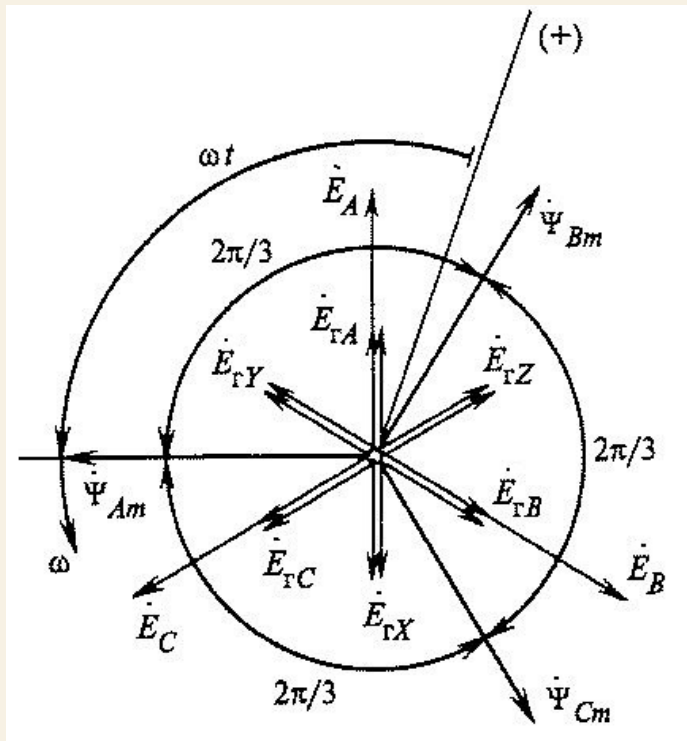


## Потокосцепление и ЭДС катушки, фазы, обмотки

Все фазы одинаковы и сдвинуты в пространстве на угол  $\gamma_{BA} = \frac{2\pi}{p\tau} = \frac{\gamma_p}{\tau}$  или эл.угол  $\alpha_{BA} = p\gamma_{BA} = \frac{2\pi}{\tau}$

Величины векторов  $\Psi$  и ЭДС фаз одинаковы ( $\Psi_m, E_\phi$ ) и на временной плоскости образуют симметричную звезду

В трехфазной обмотке приняв фазу А за главную, запишем мгновенные значения

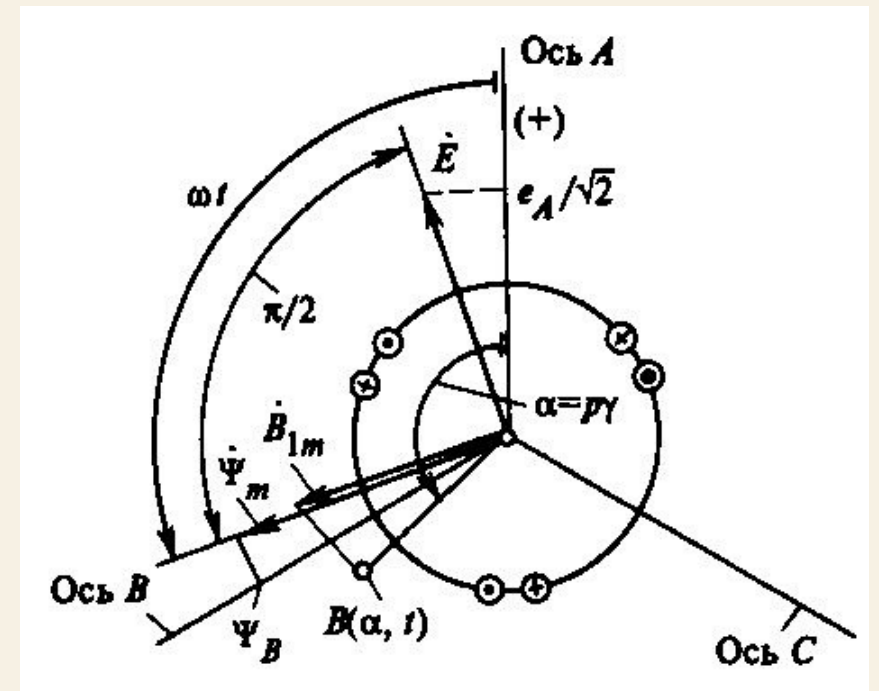


$$\begin{aligned}\Psi_A &= \Psi_m \cos(\omega t) \\ \Psi_B &= \Psi_m \cos(\omega t - \alpha_{BA}) \\ \Psi_C &= \Psi_m \cos(\omega t - \alpha_{CA})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e_A &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ e_B &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \alpha_{BA}\right) \\ e_C &= \sqrt{2}E_\phi \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \alpha_{CA}\right)\end{aligned}$$

$\Psi$  и ЭДС на пространственной плоскости можно изображать едиными векторами

$$\dot{\Psi} = \Psi_m e^{j\omega t} \quad \dot{E} = \sqrt{2}E_\phi e^{j\omega t - \frac{\pi}{2}}$$



# Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

Реальное магнитное поле – совокупность основной и высших гармонических

Подход к расчету высших гармонических  $\Psi$  и ЭДС аналогичен основной гармонике

Каждая  $\nu$  гармоника поля – синусоидальная функция со своей амплитудой  $B_{\nu m}$ , полюсным делением  $\tau_\nu = \tau / \nu$  угловой скоростью  $\Omega_\nu = \Omega_1 / \nu$

Она образует с каждой фазой потокосцепление с амплитудой

$$\Psi_{\phi \nu m} = w k_{ov} \Phi_{\nu m} \quad \text{где} \quad k_{ov} = k_{yv} k_{pv} k_{cv} \quad \Phi_{\nu m} = \frac{2}{\pi} \tau_\nu l_\delta B_{\nu m}$$

Действующая ЭДС фазы, наведенная  $\nu$  гармоникой поля

$$E_{\phi \nu} = \frac{\omega_\nu}{\sqrt{2}} \Psi_{\phi \nu m} = \frac{\omega_\nu}{\sqrt{2}} w k_{ov} \Phi_{\nu m} = \frac{2\omega_\nu}{\sqrt{2}\pi} w k_{ov} \tau_\nu l_\delta B_{\nu m}$$

Гармоники ЭДС накладываются на основную гармонику и влияют на результирующую ЭДС фазы и электромагнитный момент ( $M_{эм} = P_{эм} / \Omega$ ,  $P_{эм} = m E_\phi I_\phi$ )

Характер влияния зависит от скорости гармоники

## Потокоцепление и ЭДС от высших гармоник поля

1. ЭДС от пространственных гармоник многофазной обмотки переменного тока

Магнитное поле изменяет свою форму, т.к. содержит высшие гармоники, вращающиеся с разными угловыми скоростями

$$\Omega_v = \frac{\omega}{p_v} = \frac{\omega}{pv}$$

Однако их электрические скорости одинаковы

$$\omega_v = \Omega_v p_v = \frac{\Omega}{v} p v = \Omega p = \omega = 2\pi f$$

Все такие  $v$  гармоники наводят в фазе ЭДС одинаковой частоты  $\omega$ , совпадают по фазе с ЭДС от основной гармоники поля

→ могут складываться арифметически, изменяя амплитуду ЭДС

Результирующая ЭДС  
остается синусоидальной

Суммарная ЭДС фазы от высших гармонических поля

$$E_{\text{сд}} = \sum_{v \neq 1} E_{\phi v} = 2\sqrt{2} f \omega \tau l_{\delta} \sum_{v \neq 1} \frac{k_{ov} B_{vm}}{v}$$

– ЭДС дифференциального рассеяния  
(от 0,5% до 5% от  $E_{\phi 1}$ )

Не участвует в преобразовании энергии в ЭМ

## Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

### 2. ЭДС от высших гармоник поля обмотки возбуждения

Магнитное поле ОВ неизменно, все гармоники вращаются с одинаковой скоростью  $\Omega_v = \Omega$

При этом электрическая скорость наведенной гармоники ЭДС  $\omega_v = \Omega_v p_v = \Omega p v = \omega v = 2\pi f v$

Каждая такая  $v$  гармоника наводит в фазе ЭДС временную гармонику, изменяющуюся с частотой  $f_v = fv$

Оценить влияние  $v$  гармоники  
можно так

$$\frac{E_{\phi v}}{E_{\phi 1}} = \frac{k_{ov} B_{vm}}{k_{1v} B_{1m}}$$

Под действием временных гармоник искажается форма ЭДС

Для оценки степени искажений

– коэффициент искажения синусоидальности

$$k_U = \frac{\sqrt{\sum_{v \neq 1} E_{vm}^2}}{E_{1m}} 100\%$$

(THD – суммарный коэффициент гармонических искажений)

Нормально допустимое значение в сети с  $U_c = 0,38$  кВ – 8,0; в сети с  $U_c = 6...20$  кВ – 5,0;

в сети с  $U_c = 35$  кВ – 4,0; в сети с  $U_c = 110...330$  кВ – 2,0

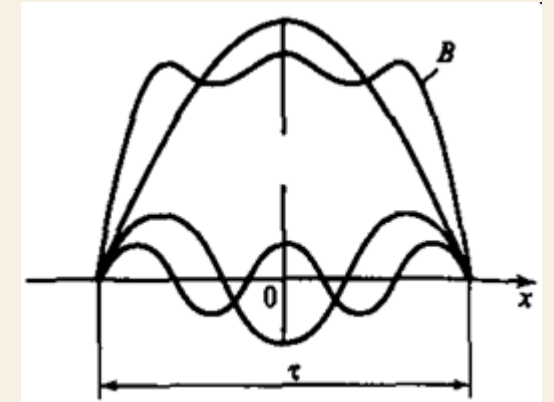
## Потокосцепление и ЭДС от высших гармоник поля

### 2. ЭДС от высших гармоник поля обмотки возбуждения

Для минимизации гармонических искажений надо улучшать форму поля ОВ

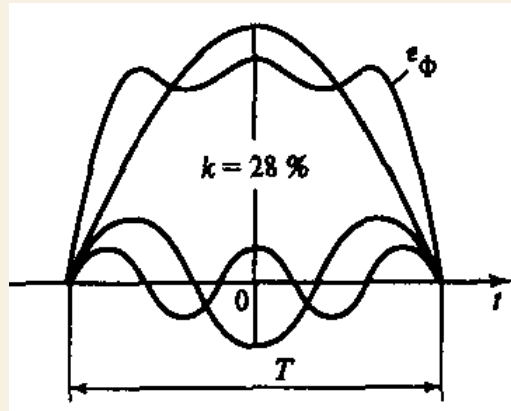
Но также важно правильно проектировать обмотку якоря

Пример, пусть ОВ создает кривую индукции  $B$  с 1, 3 и 5 гармониками

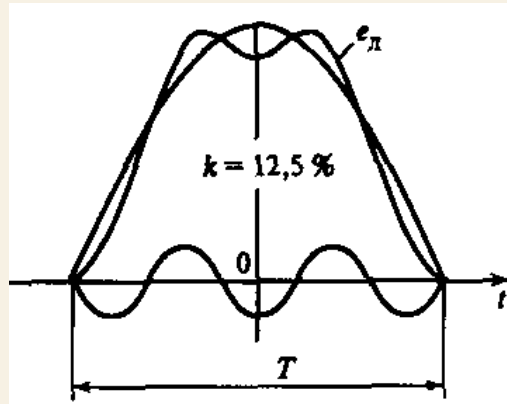


При сосредоточенной обмотке ( $q = 1$ )

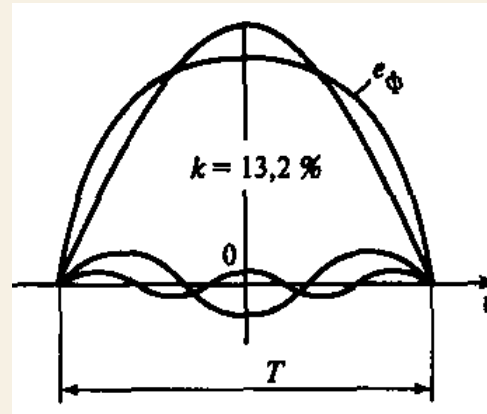
без укорочения ( $y = \tau$ ) наводятся все гармоники ЭДС и  $k_U = 28\%$



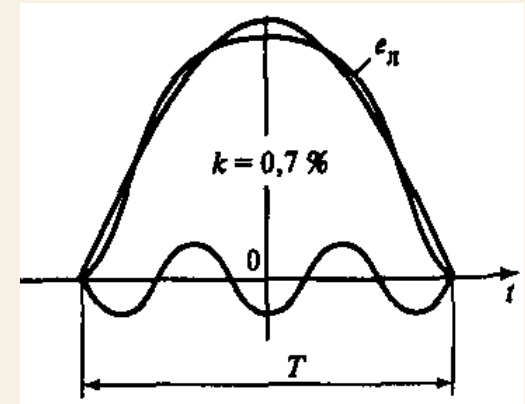
Если обмотка соединена в Y, в линейных ЭДС нет  $v = 3$  и  $k_U = 12,5\%$



Если выбрать  $q = 2$  и  $y = 0,83\tau$ , то  $k_o < 1$  и  $k_U = 13,2\%$  для  $E_\phi$



А в линейной ЭДС при этом  $k_U = 0,7\%$





# Индуктивности многофазных обмоток

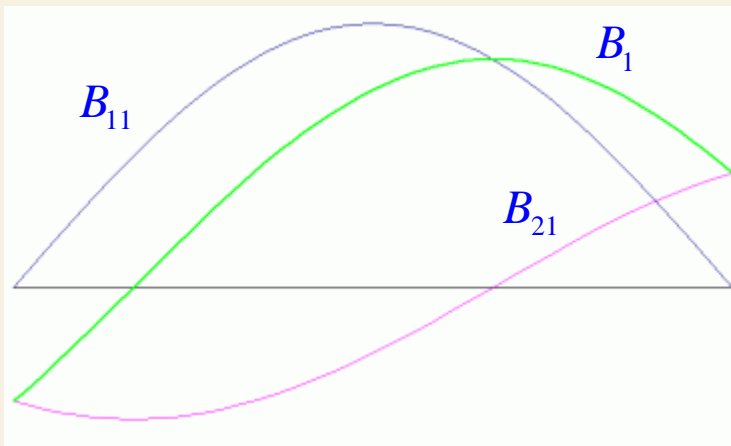
Система токов многофазной обмотки создает спектр гармоник поля в зазоре

Гармоники поля образуют потокосцепления с фазами обмотки

Коэффициент пропорциональности между током и потокосцеплением – **индуктивность** (при  $\mu_{ст} = \text{Const}$ )

Магнитное поле принято разделять на главное поле (взаимоиндукции) и поле рассеяния

**Главное магнитное поле** соответствует основной гармонике поля в зазоре  $B_1$



Его тоже можно разделить на главное поле от токов статора

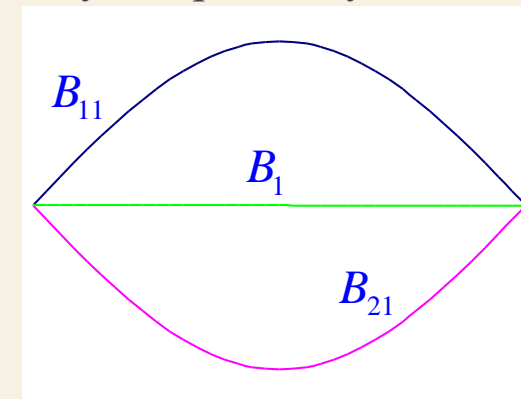
$$B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{11m} C_{11}}{\delta''} \approx \frac{\mu_0 F_{11m}}{(\delta k_{\delta 2}) k_{\delta 1}}$$

и главное поле от токов ротора

$$B_{21m} = \frac{\mu_0 F_{21m} C_{21}}{\delta'} \approx \frac{\mu_0 F_{21m}}{(\delta k_{\delta 1}) k_{\delta 2}}$$

**Магнитное поле рассеяния**

образовано токами  $I_1, I_2$ , не создающими основную гармонику поля в зазоре

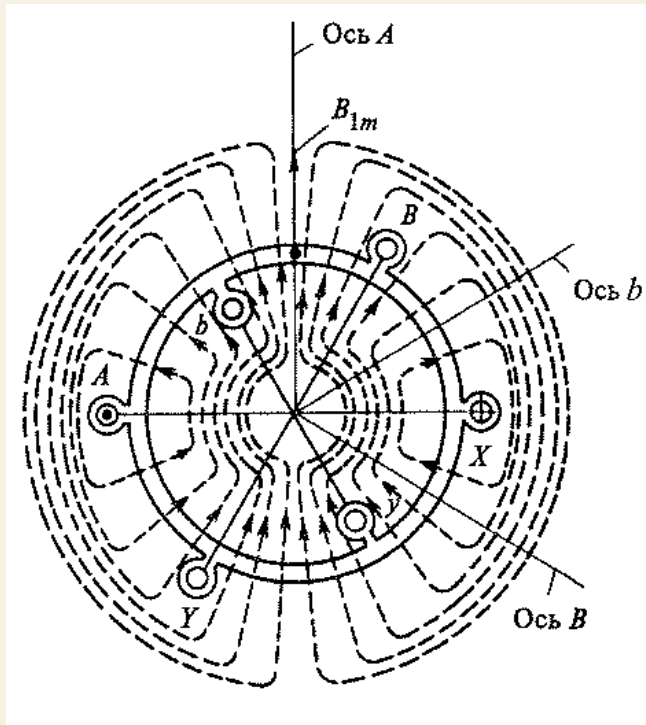


## Главная индуктивность фазы

– определяется главным потокосцеплением фазы от тока этой фазы

Пусть по фазе A протекает гармонический ток  $I_A$

Амплитуда основной гармоники МДС фазы  $F_{\phi 1m} = \frac{2\sqrt{2}I_A w_1 k_{o1}}{\pi p}$



Создает основную гармонику поля с  $B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{\phi 1m}}{\delta k_\delta} = \frac{2\sqrt{2}I_A w_1 k_{o1} \mu_0}{\pi p \delta k_\delta}$

Ее потокосцепление с фазой  $\Psi_{AAm} = w_1 k_{o1} \Phi_m = w_1 k_{o1} \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{11m}$

Тогда отношение амплитуды потокосцепления к амплитуде тока

$$L_{AA} = \frac{\Psi_{AAm}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} (w_1 k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta} \quad \text{– главная индуктивность фазы}$$

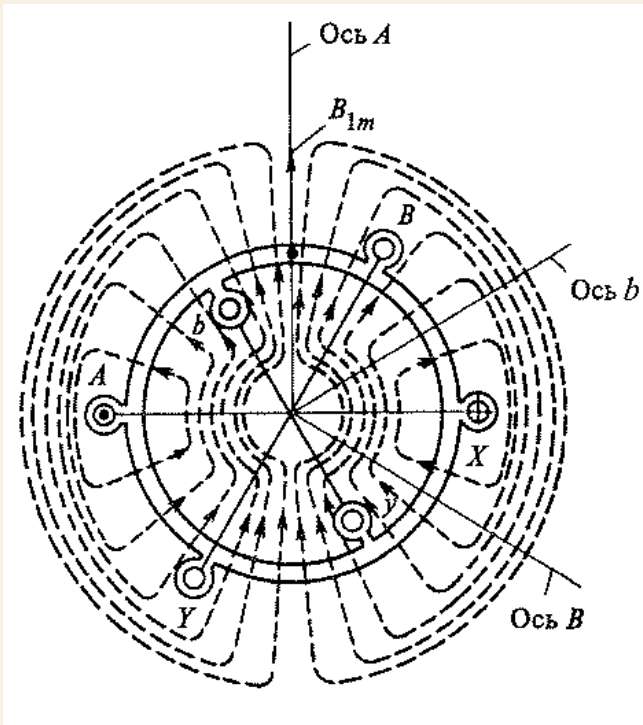
$L_{AA}$  зависит от геометрии зазора ( $\delta$  и  $\tau l_\delta$ ) и обмоточных данных ( $w_1 k_{o1}$  и  $p$ )

$L_{AA}$  не зависит от положения ротора (при гладком роторе)

## Главная взаимная индуктивность между фазами

– определяется главным потокосцеплением фазы от тока другой фазы

Потокосцепление фазы с волной поля зависит от положения фазы относительно начала координат (относительно возбужденной фазы)



$$\Psi_{BAm} = w_1 k_{o1} \Phi_m \cos(\alpha_{BA}) = \Psi_{AAm} \cos(\alpha_{BA})$$

Тогда главная взаимная индуктивность между фазами

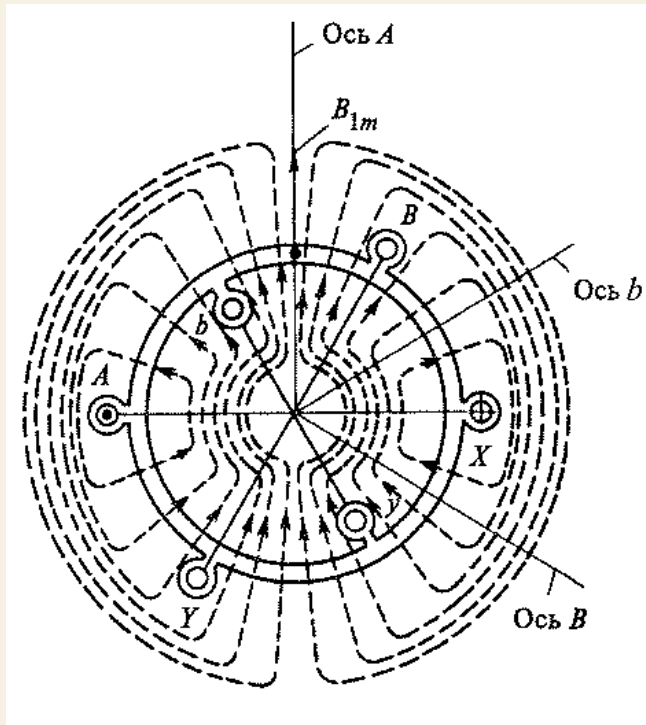
$$L_{BA} = \frac{\Psi_{BAm}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{\Psi_{AAm} \cos(\alpha_{BA})}{\sqrt{2}I_A} = L_{AA} \cos(\alpha_{BA})$$

$$\text{Для 3-фазной обмотки} \quad \alpha_{BA} = \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha_{CA} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{Тогда} \quad L_{BA} = L_{CA} = -\frac{1}{2}L_{AA}$$

## Главная взаимная индуктивность между фазами первичной и вторичной обмоток

– определяется главным потокосцеплением фазы от тока другой фазы  
и также зависит от угла между осями фаз



Потокосцепление фазы  $b$  с волной поля, созданного фазой  $A$

$$\begin{aligned}\Psi_{bAm} &= w_2 k_{o2} \Phi_m \cos(\alpha_{bA}) \\ &= w_2 k_{o2} \frac{2}{\pi} \tau l_\delta B_{11m} \cos(\alpha_{bA})\end{aligned}$$

где основная гармоника поля, созданная фазой  $A$

$$B_{11m} = \frac{\mu_0 F_{\phi 1m}}{\delta k_\delta} = \frac{2\sqrt{2} I_A w_1 k_{o1} \mu_0}{\pi p \delta k_\delta}$$

Тогда главная взаимная индуктивность между фазами  $b$  и  $A$

$$L_{bA} = \frac{\Psi_{bAm}}{\sqrt{2} I_A} = L_m \cos(\alpha_{bA})$$

где  $L_m$  – максимальная взаимная индуктивность (когда оси фаз совпадают)

$$L_m = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

При вращении ротора угол  $\alpha_{bA} = p\Omega \cdot t$  постоянно возрастает, а индуктивность  $L_{bA}$  изменяется периодически

## Главная индуктивность обмотки

– индуктивность фазы обмотки с учетом влияния всех остальных фаз этой обмотки

$$L_{11} = \frac{\operatorname{Re}(\dot{\Psi}_{Am})}{\operatorname{Re}(\dot{I}_{Am})} \quad \text{где для 3-фазной обмотки} \quad \dot{\Psi}_{Am} = \dot{I}_{Am}L_{AA} + \dot{I}_{Bm}L_{BA} + \dot{I}_{Cm}L_{CA}$$

1. Для токов прямой и обратной последовательности  $\dot{I}_{Am} + \dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm} = 0$  или  $\dot{I}_{Am} = -(\dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm})$   
в 3-фазной обмотке

$$\text{кроме того} \quad L_{BA} = L_{CA} = -\frac{1}{2}L_{AA}$$

$$\text{Т.е.} \quad \dot{\Psi}_{Am} = \dot{I}_{Am}L_{AA} + L_{BA}(\dot{I}_{Bm} + \dot{I}_{Cm}) = \dot{I}_{Am}L_{AA} - \dot{I}_{Am}L_{BA} = \dot{I}_{Am}L_{AA} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

Тогда главная индуктивность 3-фазной обмотки  $L_{11} = \frac{3}{2}L_{AA} = \frac{6\mu_0}{p\pi^2} (w_1k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$

$$\text{Главная индуктивность } m_1\text{-фазной обмотки} \quad L_{11} = \frac{m_1}{2}L_{AA} = \frac{2m_1\mu_0}{p\pi^2} (w_1k_{o1})^2 \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

2. Для токов нулевой последовательности  $\dot{I}_{A0m} = \dot{I}_{B0m} = \dot{I}_{C0m}$   $\dot{\Psi}_{A0m} = \dot{I}_{A0m}(L_{AA} + L_{BA} + L_{CA})$   
в 3-фазной обмотке

$$\text{и главная индуктивность обмотки} \quad L_{11(0)} = L_{AA} + L_{BA} + L_{CA} = L_{AA} - \frac{1}{2}L_{AA} - \frac{1}{2}L_{AA} = 0$$

Главная взаимная индуктивность между фазой первичной обмотки и всей вторичной обмоткой

– определяется потокосцеплением фазы А с полем, созданным всей вторичной обмоткой

Ток вторичной обмотки  $I_2$  создает основную гармонику МДС вторичной обмотки

$$F_{21m} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2}}{\pi r}$$

Которая образует основную гармонику поля

$$B_{21m} = \frac{\mu_0 F_{21m}}{\delta k_\delta} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2} \mu_0}{\pi r \delta k_\delta}$$

Максимальное потокосцепление этого поля с фазой А (когда ось поля совпадает с осью фазы)

$$\Psi_{Am} = w_1 k_{o1} \Phi_m = \frac{2}{\pi} \tau l_\delta w_1 k_{o1} B_{21m}$$

Тогда главная взаимная индуктивность (ее максимальное значение)

$$L_{12m} = \frac{\Psi_{Am}}{\sqrt{2} I_2} = \frac{2 m_2 \mu_0}{r \pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

Вспомним, что главная взаимная индуктивность между фазами первичной и вторичной обмоток

$$L_m = \frac{4 \mu_0}{r \pi^2} (w_1 k_{o1} w_2 k_{o2}) \frac{\tau l_\delta}{\delta k_\delta}$$

При этом главная взаимная индуктивность между фазой и обмоткой

$$L_{12m} = \frac{m_2}{2} L_m \quad L_{21m} = \frac{m_1}{2} L_m$$

# ИНДУКТИВНОСТИ ДЛЯ ВЫСШИХ ГАРМОНИК

Выражения для всех гармоник аналогичны,

Надо лишь учитывать разные полюсные деления  $\tau_v = \tau/v$

## Индуктивность фазы для $v$ гармонической поля

$$L_{AAv} = \frac{4\mu_0}{p_v \pi^2} (w_1 k_{ov})^2 \tau_v l_\delta \lambda_{1v} \quad \text{где } \lambda_{1v} \text{ – удельная проводимость зазора для } v \text{ гармоники} \quad \lambda_{1v} = \frac{C_{1v}}{\delta k_{\delta 2}}$$

С учетом  $\tau_v = \tau/v$  и  $p_v = pv$  запишем выражение  $L_{AAv} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{v^2} \tau l_\delta \lambda_{1v}$

## Взаимная индуктивность между фазами для $v$ гармонической поля

$$L_{BAv} = L_{AAv} \cos(\alpha_{BAv})$$

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки

где угол по  $v$  гармонике  $\alpha_{BAv} = v\alpha_{BA}$

( $v = 3c$ , где  $c$  – целое нечетное)

$$\alpha_{BAv} = (3c) \frac{2\pi}{3} = 2\pi \cdot c$$

$$\cos(\alpha_{BAv}) = 1$$

$$L_{BAv} = L_{AAv}$$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки

( $v = 1+2mk$ , где  $k$  – целое число)

$$\alpha_{BAv} = (1+6k) \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 4\pi \cdot k$$

$$\cos(\alpha_{BAv}) = -\frac{1}{2}$$

$$L_{BAv} = -\frac{1}{2} L_{AAv}$$

## Индуктивности для высших гармоник

### Индуктивность обмотки для $\nu$ гармонической поля

1. Для токов прямой и обратной последовательности

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки  
( $\nu = 3c$ )

поскольку  $L_{AA\nu} = L_{BA\nu} = L_{CA\nu}$  то

поскольку  $\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} = 0$  то

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = \dot{I}_{Am\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} L_{CA\nu}$$

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = L_{AA\nu} (\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu})$$

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = 0 \quad \text{и индуктивность} \quad L_{1\nu} = 0$$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки  
( $\nu = 1+2mk$ )

поскольку  $L_{BA\nu} = L_{CA\nu} = -\frac{1}{2} L_{AA\nu}$  и

$$\dot{\Psi}_{Am\nu} = \dot{I}_{Am\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} L_{CA\nu}$$

$$\dot{I}_{Am\nu} + \dot{I}_{Bm\nu} + \dot{I}_{Cm\nu} = 0$$

$$\text{то индуктивность} \quad L_{1\nu} = \frac{3}{2} L_{AA\nu}$$

$$\text{где} \quad L_{AA\nu} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$



## Индуктивности для высших гармоник

### Индуктивность обмотки для $\nu$ гармонической поля

2. Для токов нулевой последовательности

а) для гармоник, отсутствующих в поле 3-фазной обмотки  
( $\nu = 3c$ )

$$\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{B0m\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{C0m\nu} L_{CA\nu}$$

поскольку  $L_{AA\nu} = L_{BA\nu} = L_{CA\nu}$  и  $\dot{I}_{A0m\nu} = \dot{I}_{B0m\nu} = \dot{I}_{C0m\nu}$

то  $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = 3\dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu}$  и индуктивность  $L_{1(0)\nu} = 3L_{AA\nu}$

б) для гармоник, присутствующих в поле 3-фазной обмотки  
( $\nu = 1+2mk$ )

$$\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} L_{AA\nu} + \dot{I}_{B0m\nu} L_{BA\nu} + \dot{I}_{C0m\nu} L_{CA\nu}$$

поскольку  $\dot{I}_{A0m\nu} = \dot{I}_{B0m\nu} = \dot{I}_{C0m\nu}$  то  $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = \dot{I}_{A0m\nu} (L_{AA\nu} + L_{BA\nu} + L_{CA\nu})$

поскольку  $L_{BA\nu} = L_{CA\nu} = -\frac{1}{2}L_{AA\nu}$  то  $\dot{\Psi}_{A0m\nu} = 0$  и индуктивность  $L_{1(0)\nu} = 0$

## Индуктивности для высших гармоник

В общем случае многофазной обмотки для гармоник, присутствующих в результирующем поле

### Индуктивность самоиндукции фазы 0

по  $\nu$  гармонике

$$L_{00\nu} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$

где число витков в фазе

для простой обмотки  $w_1' = \frac{pqw_k}{a}$

для сложной обмотки  $w_1 = \frac{2pqw_k}{a}$

Угол между фазой  $n$  и фазой 0

по  $\nu$  гармонике

для простой обмотки  $\alpha_{0n\nu} = \frac{2\pi}{m'} n\nu$

для сложной обмотки  $\alpha_{0n\nu} = \frac{2\pi}{m} n\nu$

### Взаимная индуктивность между фазами 0 и $n$

по  $\nu$  гармонике

$$L_{0n\nu} = L_{00\nu} \cos(\alpha_{0n\nu})$$

### Полная индуктивность обмотки

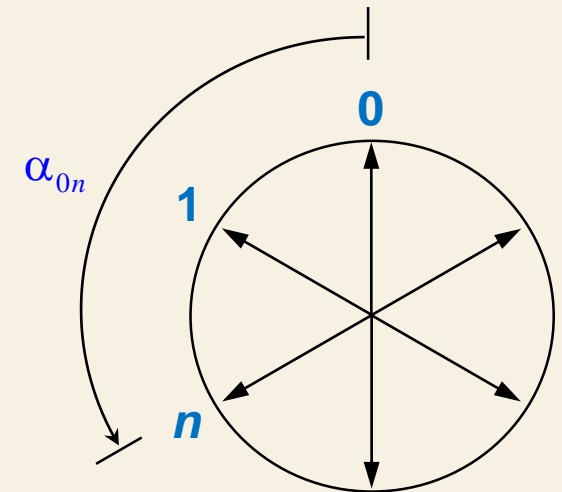
по  $\nu$  гармонике

для простой обмотки

$$L_{1\nu} = \frac{2m'\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1' k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$

для сложной обмотки

$$L_{1\nu} = \frac{2m\mu_0}{p\pi^2} \frac{(w_1 k_{ov})^2}{\nu^2} \tau l_\delta \lambda_{1\nu}$$



# Индуктивность рассеяния обмотки

Поле рассеяния образовано токами статора и ротора, не создающими основную гармонику поля в зазоре

Для этого основные гармоники МДС от токов статора и ротора должны быть равны по величине и противоположны по фазе

$$\dot{F}_{11m} = -\dot{F}_{21m}$$

По величине: 
$$\frac{m_1 \sqrt{2} I_1 w_1 k_{o1}}{p\pi} = \frac{m_2 \sqrt{2} I_2 w_2 k_{o2}}{p\pi}$$

Т.е. должно быть соотношение токов

$$I_2 = \frac{m_1 w_1 k_{o1}}{m_2 w_2 k_{o2}} I_1$$

Полевой расчет поля рассеяния

- задать геометрию ЭМ и свойства материалов
- задаться токами  $I_1$  и  $I_2$  (с учетом направлений)
- рассчитать магнитное поле
- определить потокоцепления фаз 1 и 2 сердечников
- рассчитать индуктивности рассеяния (с учетом влияния всех фаз всех обмоток)

$$L_{\sigma 1} = \frac{\Psi_{\sigma 1 m}}{\sqrt{2} I_1} \quad L_{\sigma 2} = \frac{\Psi_{\sigma 2 m}}{\sqrt{2} I_2}$$

Не забыть лобовое рассеяние

## Индуктивность рассеяния обмотки

На практике, раз уж мы приняли допущение о линейности магнитной цепи, можно применять принцип суперпозиции, рассматривая поля по отдельности

### Магнитное поле рассеяния ЭМ

- пазовое рассеяние
  - пазы статора
  - пазы ротора
- лобовое рассеяние
  - лобовые части обмотки статора
  - лобовые части обмотки ротора
- дифференциальное рассеяние
  - высшие гармоники поля от токов статора
  - высшие гармоники поля от токов ротора

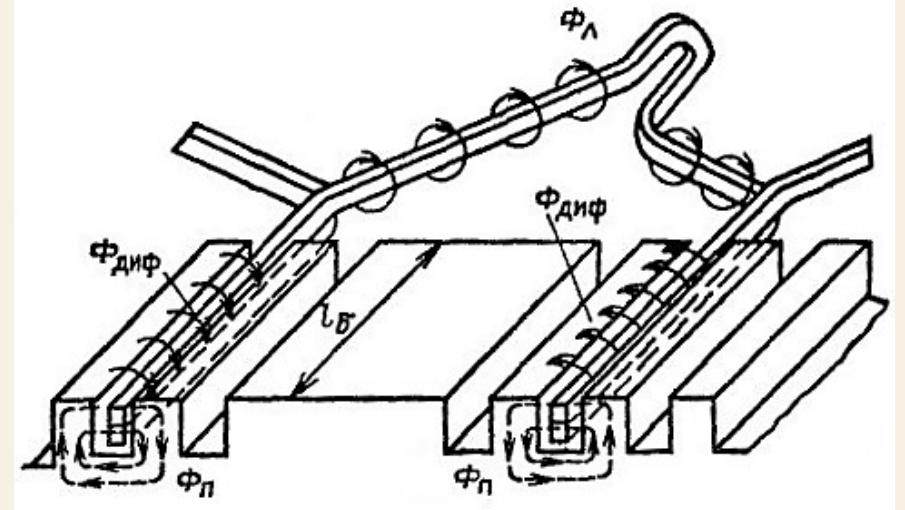
## Индуктивность рассеяния обмотки

Каждая катушка создает поля рассеяния

- пазовое  $\Phi_{\text{п}}$
- лобовое  $\Phi_{\text{л}}$
- дифференциальное  $\Phi_{\text{диф}}$

Индуктивность рассеяния одной стороны катушки

$$L_{\text{ок}} = \frac{\sum \Psi_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = \frac{\sum N_{\text{п}} \Phi_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}} \frac{\sum F_{Am} \Lambda_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}} \frac{\sum N_{\text{п}} \sqrt{2}I_A \Lambda_{\sigma}}{\sqrt{2}I_A} = N_{\text{п}}^2 \sum \Lambda_{\sigma}$$



$N_{\text{п}}$  – число проводников в пазу  
( $N_{\text{п}} = 2w_{\text{к}}$  или  $N_{\text{п}} = w_{\text{к}}$ )

Фаза обмотки расположена в  $2pq$  пазах, но разбита на  $a$  параллельных ветвей

Индуктивность одной параллельной ветви  $L_{\sigma a} = N_{\text{п}}^2 \Lambda_{\Sigma\sigma} \cdot 2 \frac{pq}{a}$

Индуктивность фазы из  $a$  параллельных ветвей

$$L_{\sigma} = \frac{1}{a} N_{\text{п}}^2 \Lambda_{\Sigma\sigma} 2 \frac{pq}{a}$$

Число витков фазы  $w = w_{\text{к}} \frac{2pq}{a} = \frac{N_{\text{п}}}{2} \frac{2pq}{a} = N_{\text{п}} \frac{pq}{a}$

в однослойной обмотке  $w = w_{\text{к}} \frac{pq}{a} = N_{\text{п}} \frac{pq}{a}$

Тогда индуктивность рассеяния фазы  $L_{\sigma} = 2w^2 \frac{1}{pq} \Lambda_{\Sigma\sigma}$  или  $L_{\sigma} = 2w^2 \frac{\mu_0 l_{\delta}}{pq} \lambda_{\sigma}$

где  $\lambda_{\sigma} = \lambda_{\text{сп}} + \lambda_{\text{сл}} + \lambda_{\text{сд}}$   
– коэффициент проводимости

Для двухслойной обмотки  $\lambda_{\text{сп}}$  должен учитывать укорочение шага катушки

## Индуктивность рассеяния обмотки

Обмотки сердечников 1 и 2 различны и рассчитываются как

- Индуктивность рассеяния обмотки 1 сердечника

$$L_{\sigma 1} = 2\mu_0 w_1^2 \frac{l_1}{pq_1} \lambda_{\sigma 1}$$

- Индуктивность рассеяния обмотки 2 сердечника

$$L_{\sigma 2} = 2\mu_0 w_2^2 \frac{l_2}{pq_2} \lambda_{\sigma 2}$$

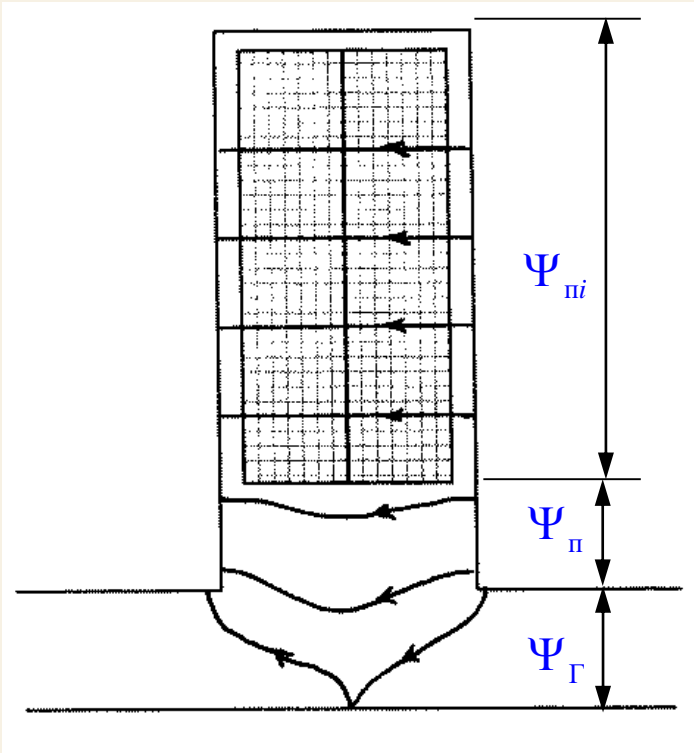
где коэффициенты магнитной проводимости для потокосцепления рассеяния

$$\lambda_{\sigma 1} = \lambda_{\sigma 11} + \lambda_{\sigma 12} + \lambda_{\sigma 13}$$

$$\lambda_{\sigma 2} = \lambda_{\sigma 21} + \lambda_{\sigma 22} + \lambda_{\sigma 23}$$

# Пазовое рассеяние

## а) численный расчет поля пазового рассеяния



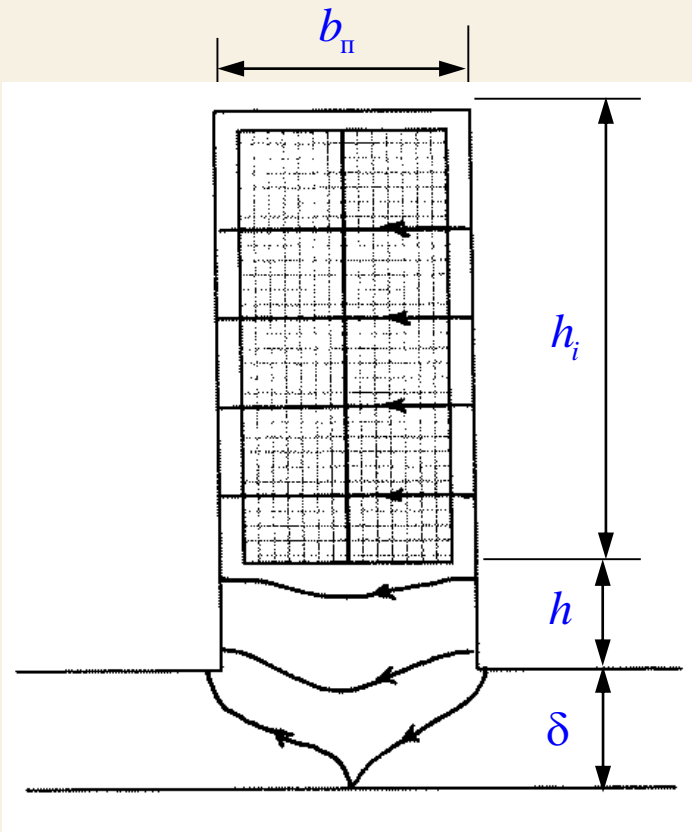
- модель одиночного паза (можно на ед.длины  $l = 1$  м)
- насыщение не влияет  $\rightarrow \mu_{ст} = \infty$
- граничные условия (можно учесть симметрию)
- ток паза  $i_{\Pi}$  (произвольно)
- расчет поля
- определение потокосцеплений
  - потокосцепление токовой части паза (можно  $\Psi$  катушки)
  - потокосцепление безтоковой части паза (можно  $\Phi$ )
  - потокосцепление по головкам зубцов (можно  $\Phi$ )
- потокосцепление пазового рассеяния (полное в Вб)
$$\Psi_{\sigma\Pi} = \Psi_{\Pi i} + \Psi_{\Pi} + \Psi_{\Gamma}$$
- коэффициент проводимости

$$\lambda_{\sigma\Pi} = \frac{\Psi_{\sigma\Pi}}{i_{\Pi}} \frac{1}{\mu_0 l}$$

## Пазовое рассеяние

б) использование инженерных методик (книги по проектированию ЭМ)

Например, для паза прямоугольной формы



Коэффициент проводимости пазового рассеяния

$$\lambda_{\sigma\Pi} = \lambda_{\Pi i} + \lambda_{\Pi} + \lambda_{\Gamma} = \frac{h_i}{3b_{\Pi}} + \frac{h}{b_{\Pi}} + \lambda_{\Gamma}$$

Коэффициент проводимости рассеяния по головкам зубцов

$$\lambda_{\Gamma} = \frac{\delta}{b_{\Pi}} - \frac{\gamma'}{4} - \frac{\Theta}{2}$$

где  $\gamma' = \frac{4}{\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{a_{\Pi}}} \arctg \frac{1}{\sqrt{a_{\Pi}}} - \ln \sqrt{1 + \frac{1}{a_{\Pi}}} \right)$   $a_{\Pi} = \left( \frac{b_{\Pi}}{2\delta} \right)^2$   $\Theta = \frac{\ln 4}{\pi}$

Для двухслойной обмотки  
надо учесть укорочение катушки

$$\lambda_{\sigma\Pi} = \left( \frac{h_i}{3b_{\Pi}} + \frac{h}{b_{\Pi}} + \lambda_{\Gamma} \right) \frac{3\beta + 1}{4}$$



# Лобовое рассеяние

- а) численный расчет поля лобового рассеяния (3D) – крайне редко
- б) использование инженерных методик

В большинстве случаев учитывают только относительный вылет лобовой части катушки

$$\beta_B = \frac{l_B}{y} = \frac{l_B}{\beta\tau}$$

Коэффициент проводимости лобового рассеяния

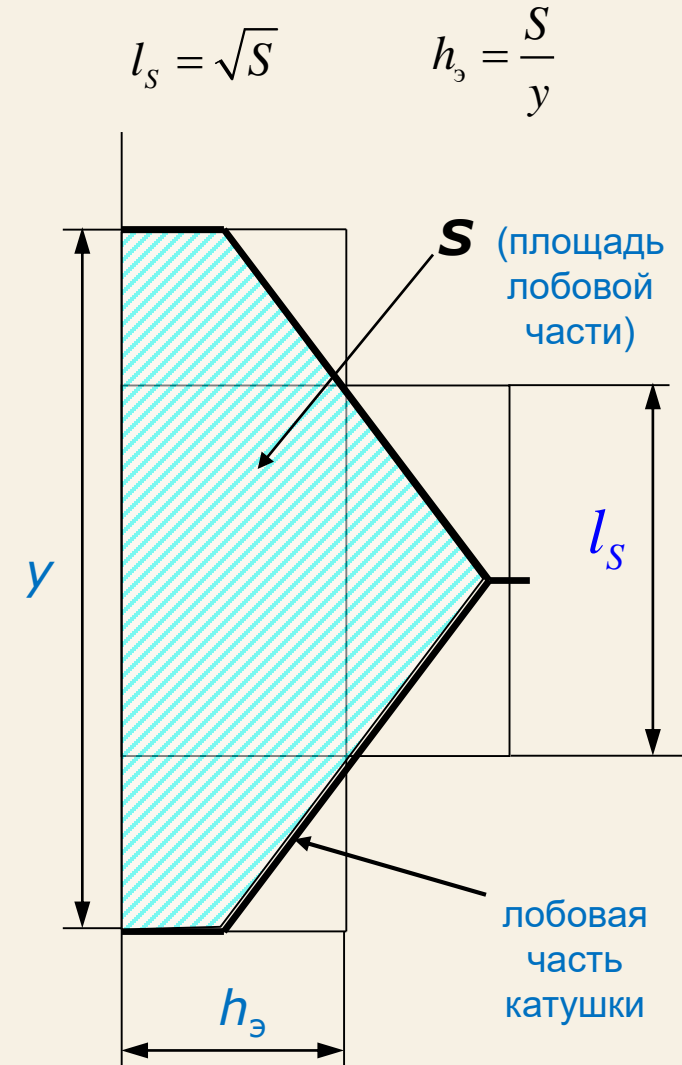
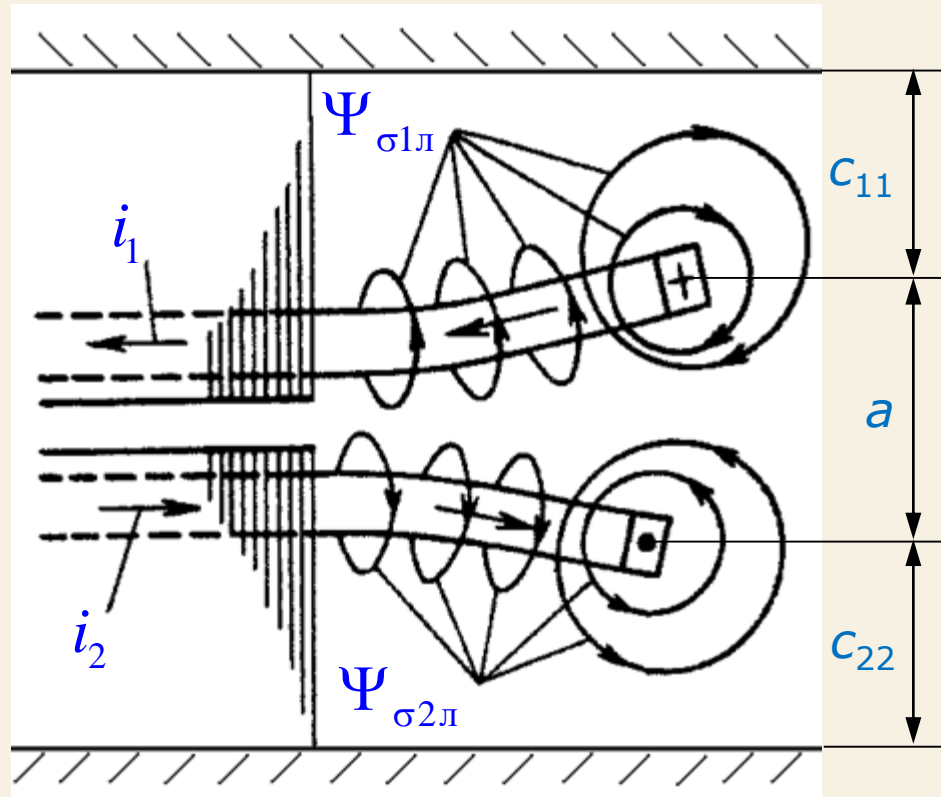
$$\lambda_{\text{сл}} = 0,34\sqrt{\beta_B + 0,1} \frac{\beta\tau q}{l_{\text{ст}}}$$

Более точный вариант – методика И.Майе

- физическое моделирование полей лобового рассеяния
- метод планирования эксперимента
- полиномиальные зависимости  $\lambda_{\text{сл}}$
- расчет  $\lambda_{\text{сл}}$  для базовой обмотки
- поправочные коэффициенты для прочих обмоток

# Лобовое рассеяние по методике И.Майе

Характерные размеры



## Лобовое рассеяние по методике И.Майе

По результатам экспериментов получена эмпирическая формула для расчета коэффициента проводимости лобового рассеяния (для токов прямой и обратной последовательности)

$$\text{Для обмотки 1} \quad \lambda_{\sigma 1л} = \frac{l_{S1}}{2l_1 q_1} (\lambda_{11} - \lambda_{12})$$

$$\text{Аналогично для обмотки 2} \quad \lambda_{\sigma 2л} = \frac{l_{S2}}{2l_2 q_2} (\lambda_{22} - \lambda_{21})$$

Здесь коэффициент проводимости самоиндукции лобового рассеяния обмотки 1

$$\lambda_{11} = k_p k_\beta k_{c1} \lambda'_{11}$$

коэффициент проводимости взаимной индукции лобового рассеяния обмотки 1 с обмоткой 2

$$\lambda_{12} = k_p k_\beta k_a k_h k_{c2} \lambda'_{12}$$

коэффициенты проводимости для базовой обмотки

$$\lambda'_{11} = 2,4q_1^2 \quad \lambda'_{12} = 1,45q_1^2$$

Базовая обмотка имеет  $2p = 6$ ,  
диаметральный шаг (укорочение  $\beta = 1$ ),  
соотношение  $a / \tau = 0,225$ ,  
соотношение  $h_{\sigma 2} / h_{\sigma 1} = 1$

Коэффициент проводимости лобового рассеяния для токов нулевой последовательности

Отличия всех прочих обмоток учитываются поправочными коэффициентами  $k$

$$\lambda_{\sigma 1л} = \frac{l_{S1}}{2l_1 q_1} \lambda_{10} \quad \lambda_{10} = k_p k_\beta k_{c1} \lambda'_{10} \quad \lambda'_{10} = 0,31q_1^2$$

## Лобовое рассеяние по методике И.Майе

Поправочные коэффициенты

Учет кривизны лобовой части

$2p$	2	4	6	8, 10...
$k_p$	1,08	1,04	1,0	0,97

Учет укорочения шага обмотки

$\beta$	0,75	0,834	0,918	1,0
$k_\beta$	0,935	0,965	0,985	1,0

Учет расстояния между обмотками разных сердечников

$a / \tau$	0,15	0,225	0,3
$k_a$	1,12	1,0	0,885

Учет соотношения вылетов лобовых частей

$h_{\text{э}2} / h_{\text{э}1}$	0,15	0,4	0,5	0,8	1,0	1,25	2,0	2,5	7,0
$k_h$	0,57	0,73	0,79	0,94	1,0	1,05	1,12	1,15	1,47

Учет расстояния до ферромагнитных тел: при  $\frac{c_{11}}{\tau} > \frac{1}{3}$  и  $\frac{c_{22}}{\tau} > \frac{1}{3}$  можно принять  $k_{c1} = 1$  и  $k_{c2} = 1$

Промежуточные значения можно получать с помощью линейной интерполяции

# Дифференциальное рассеяние

– обусловлено высшими гармоническими поля в зазоре

ЭДС дифференциального рассеяния  $E_{\sigma d} = \sum_{v \neq 1} E_{\phi v} = 2\sqrt{2} f \omega \tau l_{\delta} \sum_{v \neq 1} \frac{k_{ov} B_{vm}}{v}$

Поскольку пространственные гармоники созданы током  $I_1$ ,  
можно перейти к равенству

$$\dot{E}_{\sigma d} = -j \dot{I}_1 x_{\sigma d}$$

где индуктивное сопротивление дифференциального рассеяния  
является суммой индуктивных сопротивлений  
для высших гармонических поля

$$x_{\sigma d} = \sum_{v \neq 1} x_{1v}$$

Тогда коэффициент проводимости дифференциального рассеяния  
(в формуле для полной индуктивности рассеяния)  
можно записать как

$$\lambda_{\sigma 1d} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}} \zeta$$

$$\text{где } \zeta = 3 \left( \frac{z_1}{\pi p} \right)^2 \sum_{v \neq 1} \left( \frac{k_{ov}}{v} \right)^2 C_{1v}$$

Т.к.  $\zeta$  близко к 1, часто считают упрощенно  $\lambda_{\sigma 1d} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}}$

## Дифференциальное рассеяние

Найденное значение  $\lambda_{\sigma d}$  часто оказывается завышенным

При расчете  $\zeta$  учитывается влияние высших гармонических поля, созданных переменным током многофазной обмотки

- Высшие гармонические поля, созданные током статора, вращаются относительно ротора со скоростью скольжения ( $\Omega_v - \Omega$ )
  - В обмотке ротора они наводят ЭДС с частотой скольжения
    - В замкнутой обмотке появляются токи ротора, противодействующие породившему их полю  $v$  гармонике статора

*Демпфирующее действие* обмотки ротора уменьшает высшие гармонические поля статора

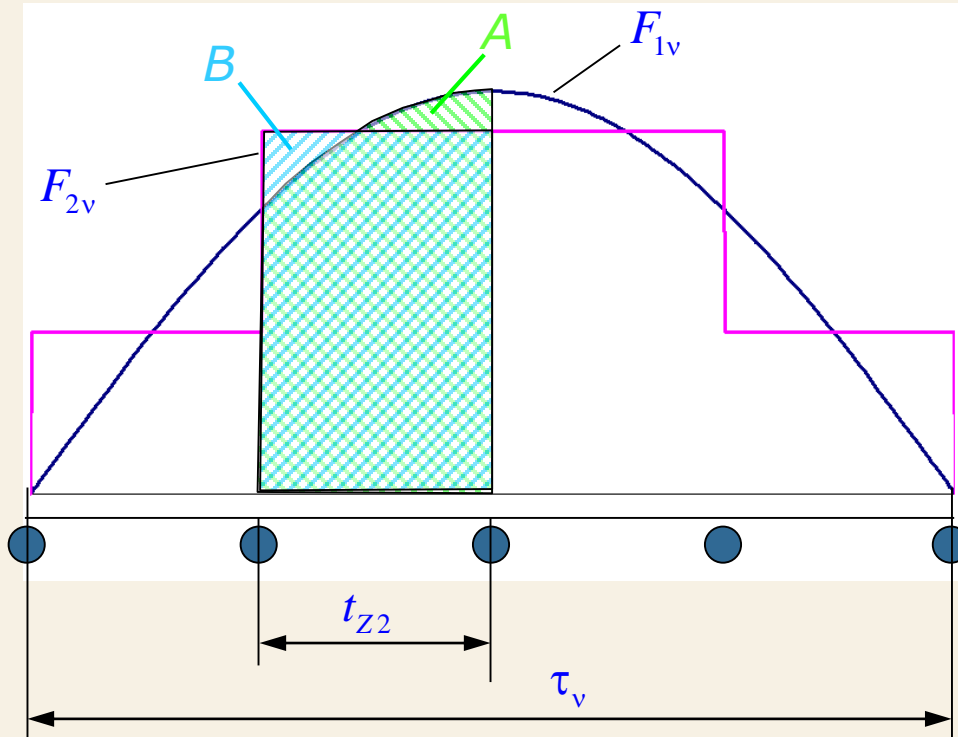
→ уменьшаются наведенные ЭДС

→ уменьшается  $\lambda_{\sigma d}$  и  $x_{\sigma d}$

Демпфирующее действие оказывается заметным только в АД с КЗ ротором (там и надо уточнять  $x_{\sigma d}$  с учетом демпфирования)

## Дифференциальное рассеяние

Например, рассмотрим  $v$  гармонику поля статора такую, что  $\tau_v = 4t_{z2}$



Чем больше отношение  $\tau_v / t_{z2}$ , тем лучше демпфирование

- площадь  $A$  определяет поток от  $F_{1v}$ , сцепленный с контуром  $t_{z2}$   
→ наводит ЭДС, создает ток в контуре и его МДС  $F_{2v}$
- площадь  $B$  определяет компенсирующий поток от МДС  $F_{2v}$
- тогда разница  $(A - B)$  характеризует нескомпенсированный поток (собственно рассеяние с учетом демпфирования)

Полное демпфирование при  $t_{z2} \rightarrow 0$  ( $z_2 \rightarrow \infty$ )

Нет демпфирования при  $t_{z2} = 2\tau$

## Дифференциальное рассеяние

Для учета демпфирования по  $\nu$  гармонике используют коэффициент демпфирования  $D_\nu$

$$x_{1\nu(\text{д})} = x_{1\nu} D_\nu$$

- при  $D_\nu = 0$ :  $x_{1\nu(\text{д})} = 0 \rightarrow$  сильное демпфирование
- при  $D_\nu = 1$ :  $x_{1\nu(\text{д})} = x_{1\nu} \rightarrow$  нет демпфирования

Коэффициент демпфирования определяется двумя факторами  $D_\nu = 1 - f_{2\nu}^2 f_{c\nu}^2$

$$f_{2\nu} = \frac{\sin \frac{\gamma_{2\nu}}{2}}{\frac{\gamma_{2\nu}}{2}} \quad \text{— коэффициент дискретности вторичной обмотки}$$

Здесь  $\gamma_{2\nu} = \frac{\pi t_{z2}}{\tau_\nu}$       при  $t_{z2} \rightarrow 0$   $f_{2\nu} \rightarrow 1$  (полное демпфирование)  
при  $t_{z2} = 2\tau_\nu$   $f_{2\nu} = 0$  (нет демпфирования)

$$f_{c\nu} = \frac{\sin \frac{\gamma_{c\nu}}{2}}{\frac{\gamma_{c\nu}}{2}} \quad \text{— коэффициент скоса стержней вторичной обмотки}$$

Здесь  $\gamma_{c\nu} = \frac{\pi b_c}{\tau_\nu}$       при  $b_c = 0$   $f_{c\nu} = 1$  (демпфирование возможно)  
при  $b_c = 2\tau_\nu$   $f_{c\nu} = 0$  (нет демпфирования)

Тогда коэффициент проводимости дифференциального рассеяния с учетом демпфирования

$$\lambda_{\sigma\text{д}} = \frac{t_{z1}}{12\delta k_{\delta 2}} \zeta_{(\text{д})} \quad \text{где} \quad \zeta_{(\text{д})} = 3 \left( \frac{z_1}{\pi p} \right)^2 \sum_{\nu \neq 1} \left( \frac{k_{o1\nu}}{\nu} \right)^2 C_{1\nu} D_\nu$$