

Методы анализа электрических машин

Магнитное поле электрической машины

МА-01

2023

Магнитное поле электрической машины

Источники магнитного поля:

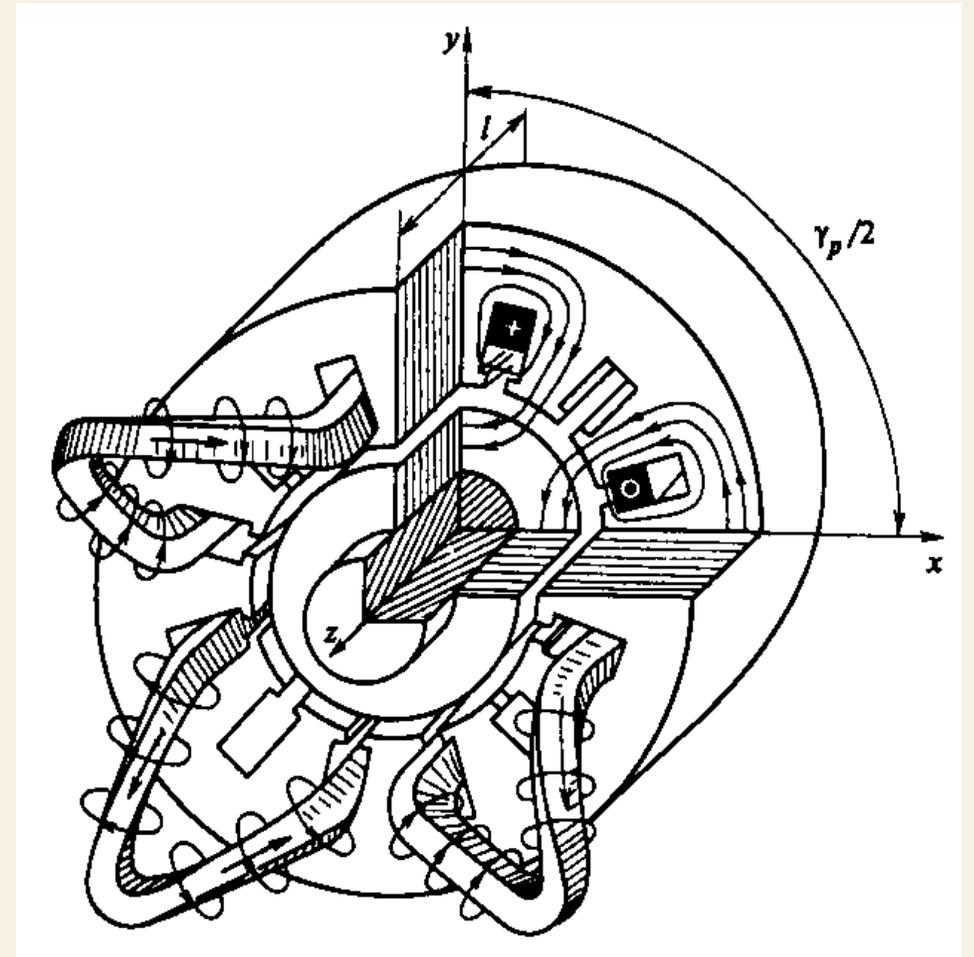
- Обмотка якоря (переменный многофазный ток)
- Обмотка возбуждения (постоянный ток)
- Постоянные магниты (постоянный поток)

Магнитное поле от токов одной фазы обмотки якоря

- Трехмерное поле
- Периодический характер поля
- Разные свойства материалов

Разный характер поля

- магнитопровод
- немагнитный зазор
- область пазов
- лобовые части
- конструктивные элементы



Магнитопровод

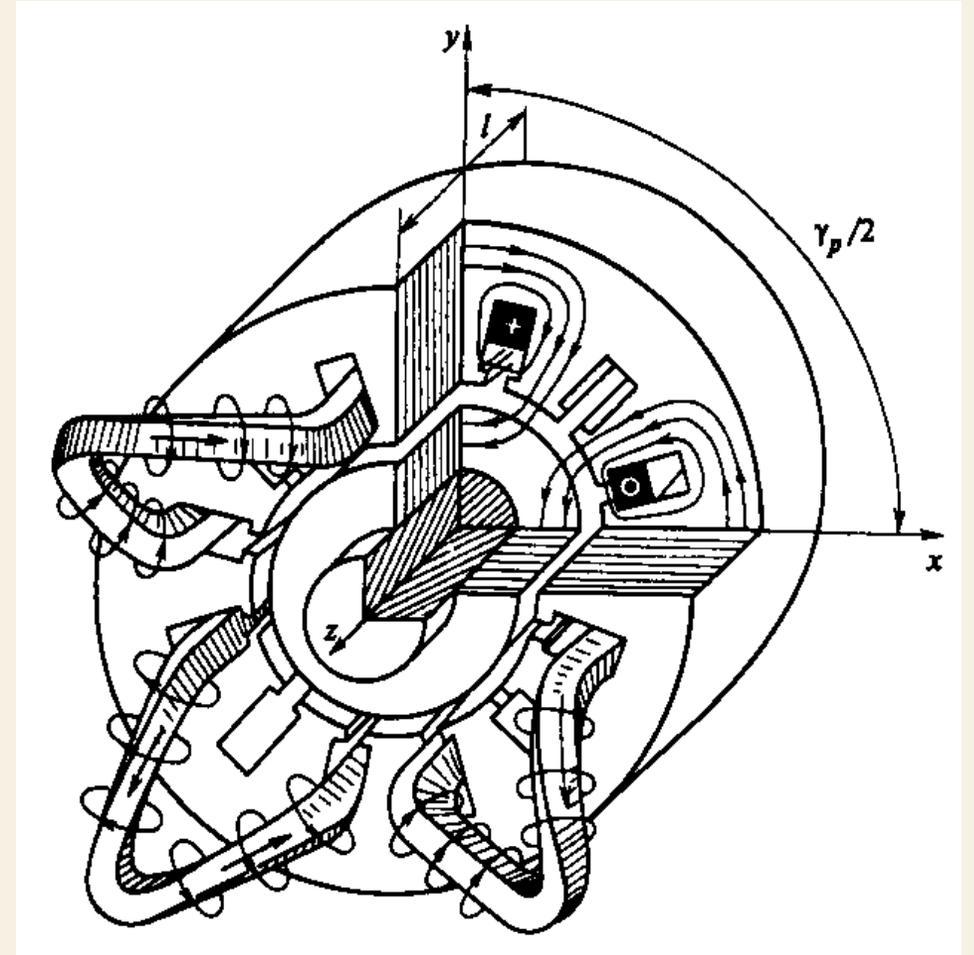
Электротехническая сталь

- свойства среды – нелинейные: $B = f(H)$
- относительная магнитная проницаемость $\mu_{ст} \gg 1$
- напряженность магнитного поля H мала
- плотность энергии магнитного поля $w = (BH)/2$ мала
- малая часть энергии магнитного поля W

Характер поля предсказуемый

- в зубцах поток радиальный
- в элементах ярма поток тангенциальный
- каждый элемент магнитопровода с равномерным Φ можно заменить сосредоточенным элементом с нелинейной характеристикой намагничивания $\Phi = f(U_\mu)$

Можно рассчитать не поле, а эквивалентную цепь с сосредоточенными элементами и получить $B_{cp}(H_{cp})$ в каждом элементе с учетом насыщения



Поле в области паза

Пазовое рассеяние

- линейная среда (медь, алюминий, изоляция)
- $\mu = 1 \rightarrow$ индукция магнитного поля B мала
 \rightarrow мала энергия магнитного поля W

Характер поля известен для пазов известной формы

- инженерные формулы – проводимость пазового рассеяния $\Lambda_{\text{сп}} = \Psi_{\text{сп}} / I_{\text{паза}}$

Можно вставить элемент $\Lambda_{\text{сп}}$ в эквивалентную цепь

Поле в области лобовых частей

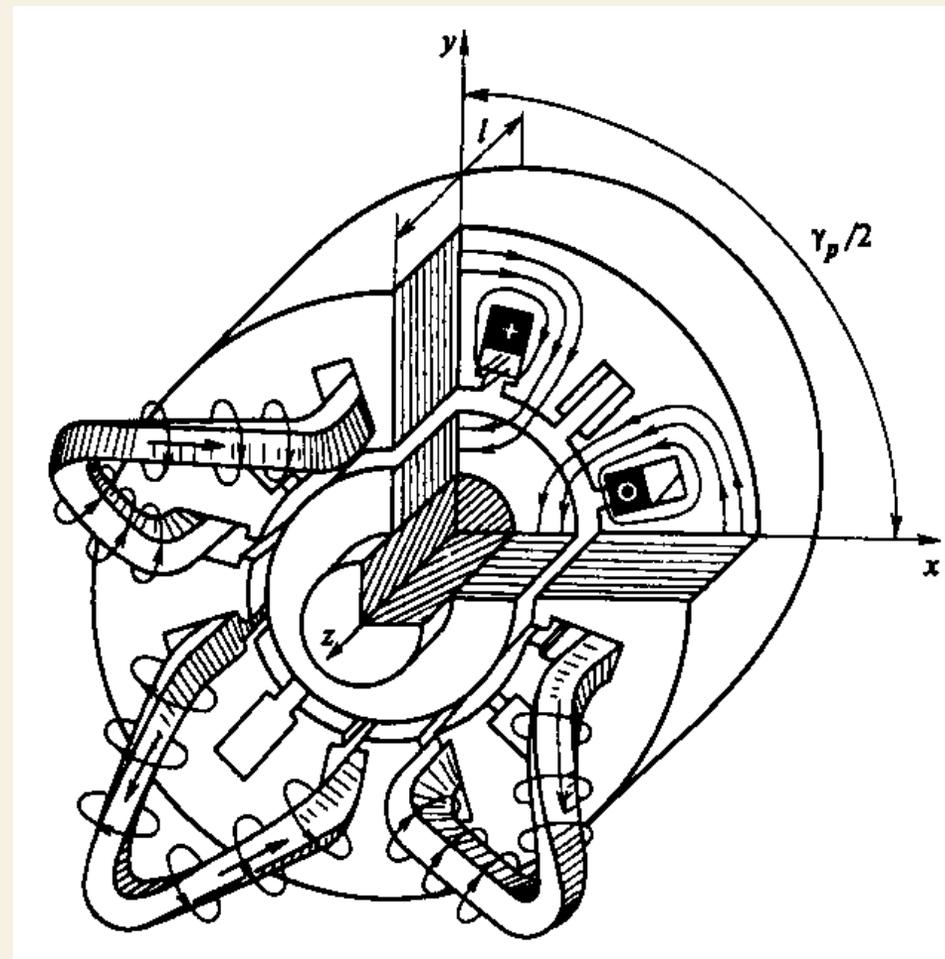
Лобовое рассеяние

- линейная среда (воздух и обмотки)
- $\mu = 1 \rightarrow$ индукция B мала \rightarrow мала энергия поля W

Характер поля сложный, трехмерный

- инженерные формулы – проводимость лобового рассеяния $\Lambda_{\text{сл}}$ \rightarrow индуктивность $L_{\text{сл}}$

Можно учесть $L_{\text{сл}}$ в уравнениях электрической цепи



Поле в немагнитном зазоре

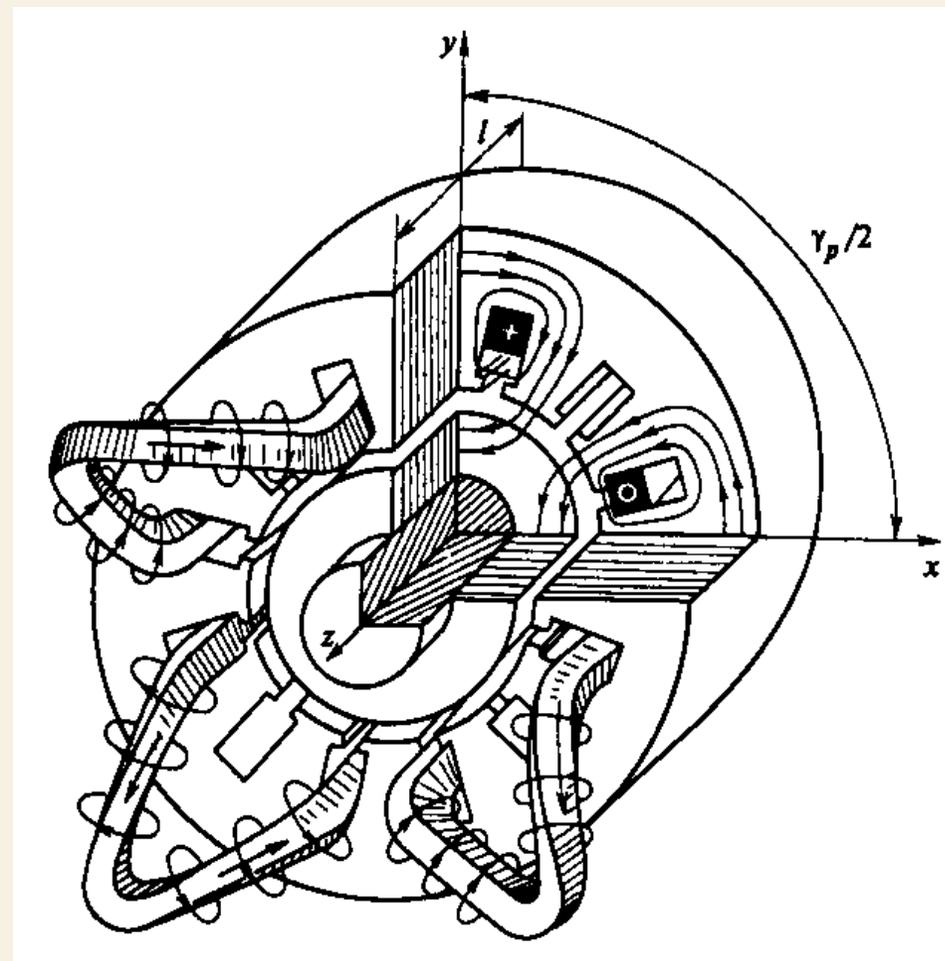
Самое важное поле

- почти вся энергия магнитного поля – в зазоре
- в нем – преобразование энергии

Характер поля сложный и постоянно изменяется при изменении токов и вращении ротора

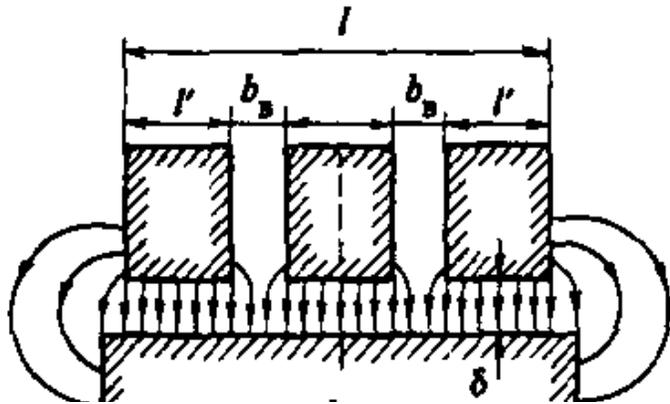
- изменяется периодически – можно сократить расчетную область
- линейная среда – можно применять метод суперпозиции

Можно найти закономерности для упрощения анализа



Учет продольной неоднородности при анализе поля

Переход 3D → 2D



Магнитное поле трехмерно, но

- поле проводника с током одинаково в любой поперечной плоскости
- поле между сердечниками ЭМ одинаково в любом поперечном сечении
- достаточно считать поток плоско-параллельного поля «на единицу длины» и домножать на реальную длину l_z (очень существенная экономия вычислительных ресурсов)

Структура ЭМ неоднородна в продольном направлении

- краевые эффекты (затухание поля на торцах ЭМ)
- разная длина сердечников статора и ротора
- охлаждающие каналы между пакетами сердечника с $\mu = 1$

Что считать «реальной длиной ЭМ»?

Переход 3D → 2D

Рассмотрим поле в продольном сечении

- учтем все неоднородности
- реальные размеры сердечников
- униполярное намагничивание (например, на оси полюса)

Распределение индукции вдоль зазора

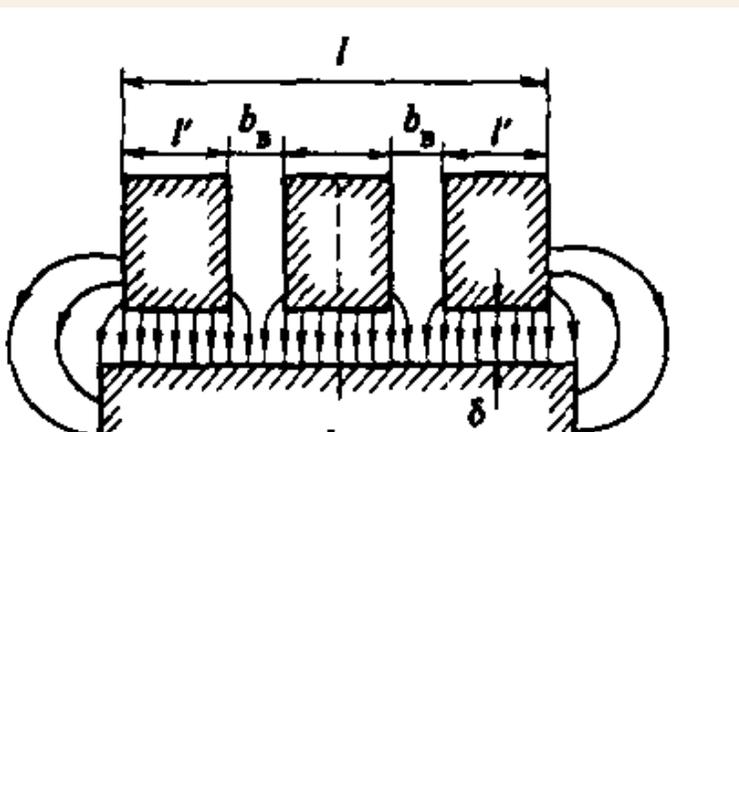
- между сердечниками поле равномерно и $B = B_m$
- напротив каналов B снижается
- на торцах поле затухает постепенно

Найдем полный поток $\Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B dz$

Заменим реальную кривую $B(z)$ прямоугольником с $B = B_m$ и длиной l_δ

Поток в ЭМ с равномерной индукцией $B = B_m$ останется неизменным, если выбрать длину l_δ так, чтобы

$$l_\delta B_m = \Phi = \int_{-\infty}^{+\infty} B dz$$



Переход 3D → 2D

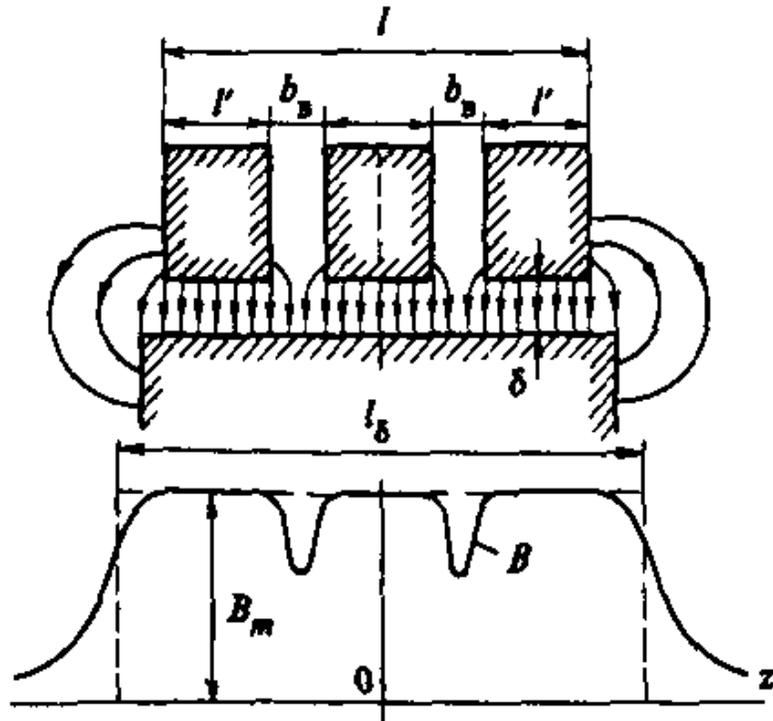
l_δ – расчетная длина машины

$$l_\delta = \frac{1}{B_m} \int_{-\infty}^{+\infty} B dz$$

Для большинства известных ЭМ есть инженерные формулы, например

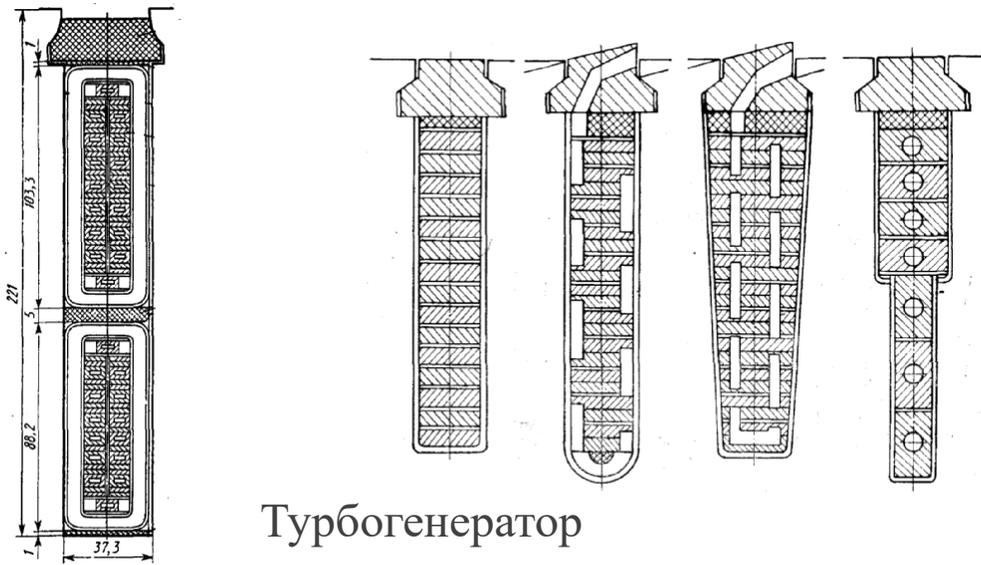
$$l_\delta = l_{\text{ст}} - n_B b'_B + 2\delta$$

где $b'_B = c_0 c_B b_B$, $c_B = \frac{b_B / (c_0 \delta)}{5 + b_B / (c_0 \delta)}$, $c_0 = 1$ или $0,5$ при каналах на одном или на двух сердечниках



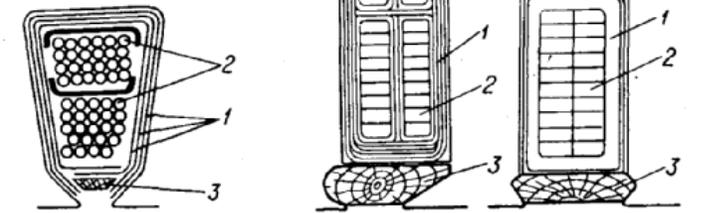
Магнитное поле в зазоре ЭМ

Воздушный (немагнитный) зазор не является гладким



Турбогенератор

Асинхронный двигатель



Гидрогенератор

Магнитное поле в зазоре, созданное токами в пазах

Численное решение (полевой расчет) – частное решение с минимальными допущениями

Аналитическое решение – общее решение для принятых допущений

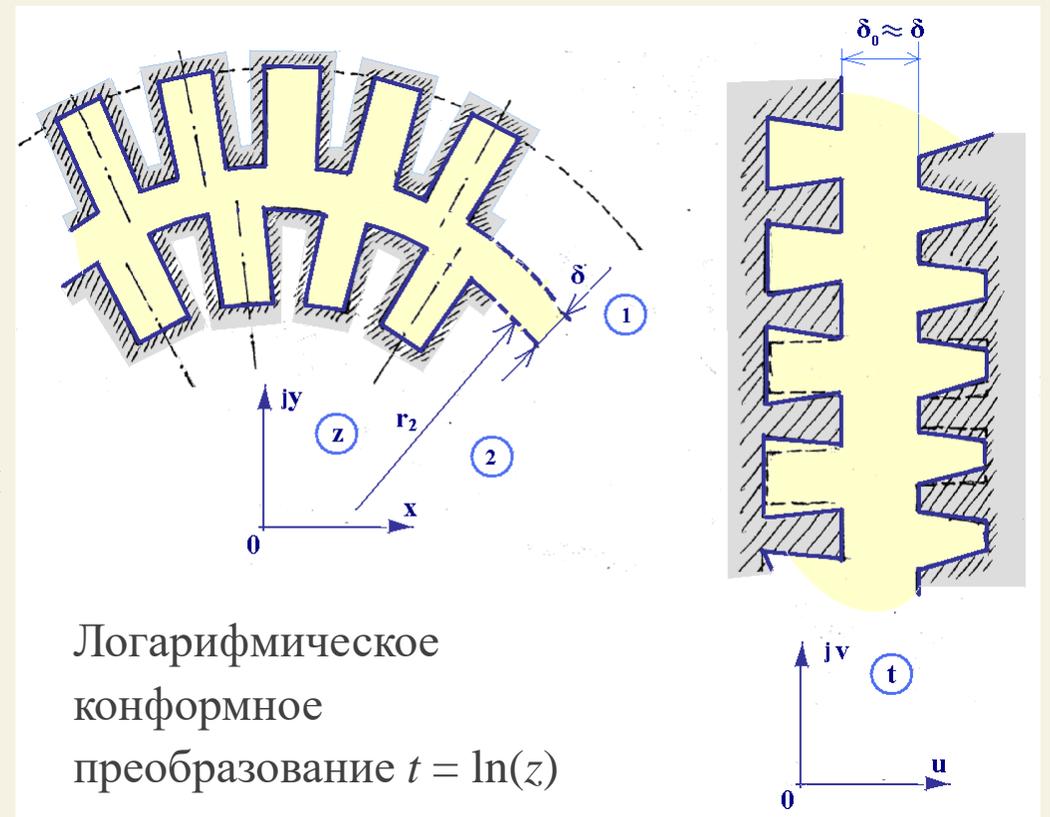
Аналитическое решение – алгебраическое выражение:

зависимость величин поля от параметров
(характерные размеры, свойства среды)

Позволяет анализировать зависимости и
принимать обоснованные решения при
конструировании ЭМ

Примем допущения

- только первый сердечник зубчатый, второй – гладкий
- поле создается обмоткой в пазах первого сердечника
- рассмотрим только поле в зазоре
- магнитная цепь линейна ($\mu_{ст} = \infty$)
- кривизну зазора не учитываем



Конформные преобразования

Взаимно однозначное отображение исходной области z на область t , при котором сохраняются углы между кривыми и формы бесконечно малых фигур (отображение поверхности земного шара на плоскость – проекция Меркатора)

Позволяет использовать известное решение простой задачи для получения решения сложной задачи

Пример: логарифмическое преобразование (прямоугольная область в плоскости t преобразуется в отрезок кольца в плоскости z)

$$z = e^t = f(t)$$

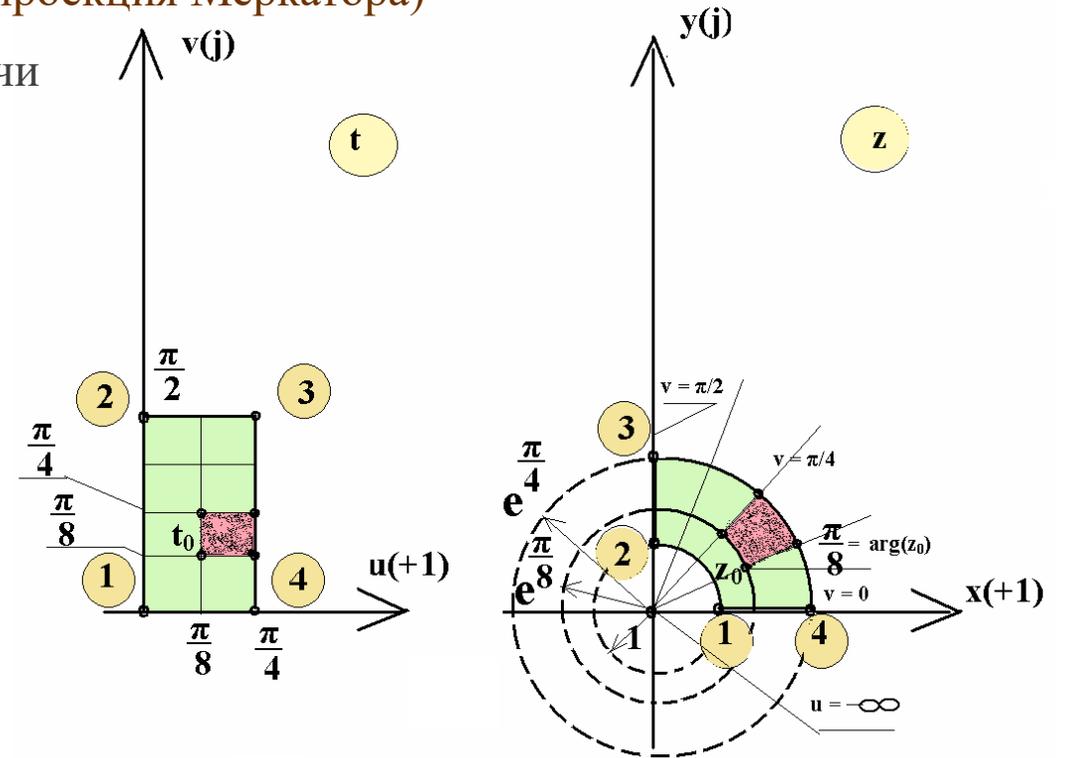
$$t = \ln z = F(z)$$

Для точки $t = u + jv$ соответствующая координата z

$$z = e^{u+jv} = e^u (\cos v + j \sin v) = x + jy$$

т.е. $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$

- линии $u = \text{Const}$ в плоскости z – окружности
- линии $v = \text{Const}$ в плоскости z – радиальные лучи



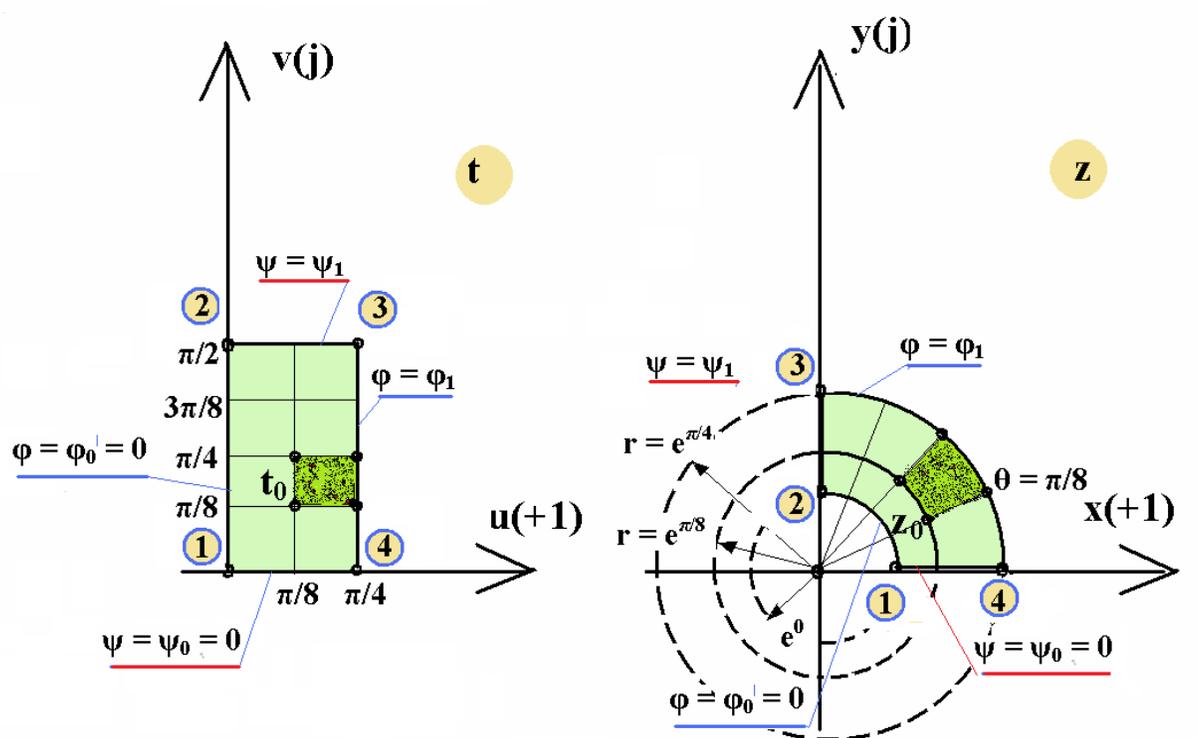
Поиск решения

Для преобразования $z = f(t)$ по известным граничным условиям и решению задачи в плоскости t (комплексная потенциальная функция $w(t)$) надо найти решение $w(z)$

Иногда это невозможно, но можно найти производную

Условие разрешимости задачи: границы области являются линиями потока или равного потенциала

Если при этом сохранены граничные условия, то решение сохраняется (только преобразуются координаты)



Пример: известно решение в плоскости t , причем прямоугольник ограничен линиями функции потока $\psi = 0$ и ψ_1 и линиями скалярного магнитного потенциала $\varphi = 0$ и φ_1

Комплексная потенциальная функция $w(t) = \varphi_t + j\psi_t$:

$$\begin{cases} \varphi_t = \varphi_1 \frac{u}{\pi/4} = \frac{4}{\pi} \varphi_1 u \\ \psi_t = \psi_1 \frac{v}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \psi_1 v \end{cases}$$

Поиск решения

Комплексная потенциальная функция

$$w(t) = \frac{4}{\pi} \varphi_1 u + j \frac{2}{\pi} \psi_1 v$$

С помощью условий Коши-Римана выразим функцию потока на границе через потенциал

$$\frac{\partial \psi_t}{\partial v} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial u} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\pi} \psi_1 = \frac{4}{\pi} \varphi_1 \quad \rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{\psi_1}{2}$$

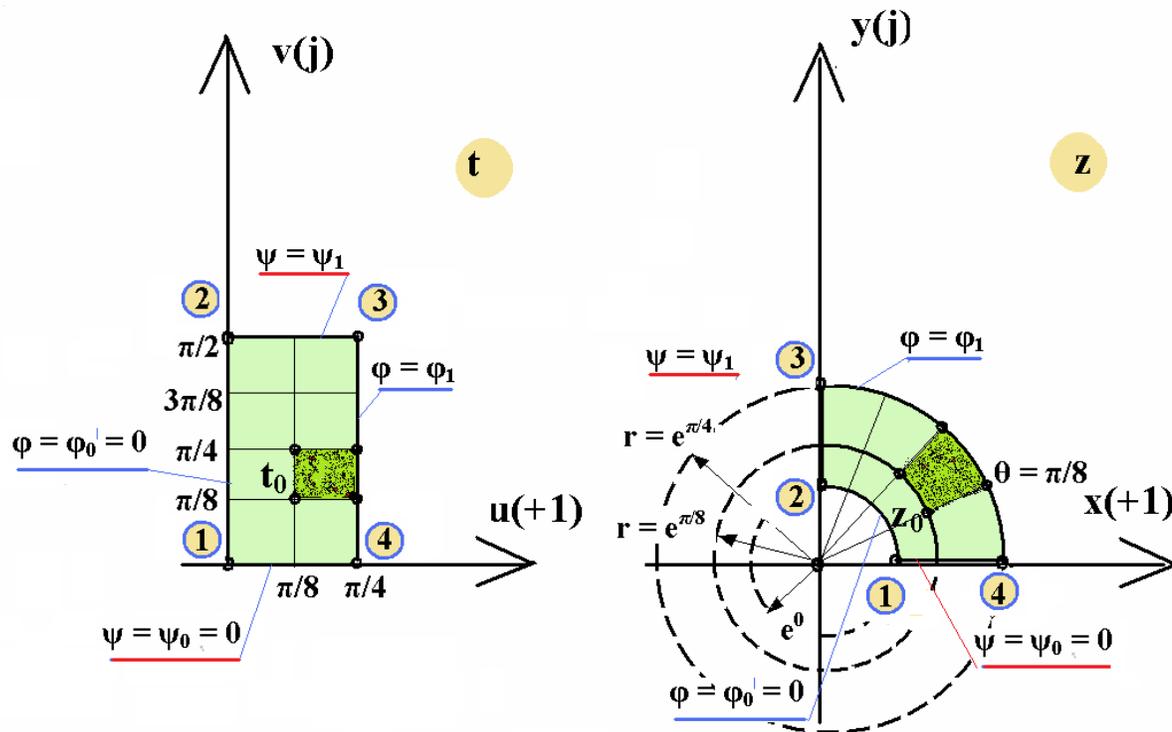
Тогда комплексная потенциальная функция в плоскости t

$$w_t(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\psi_1}{2} \cdot u + j \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot v = \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 (u + jv) = \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot t$$

Найдем комплексную потенциальную функцию в преобразованной плоскости z

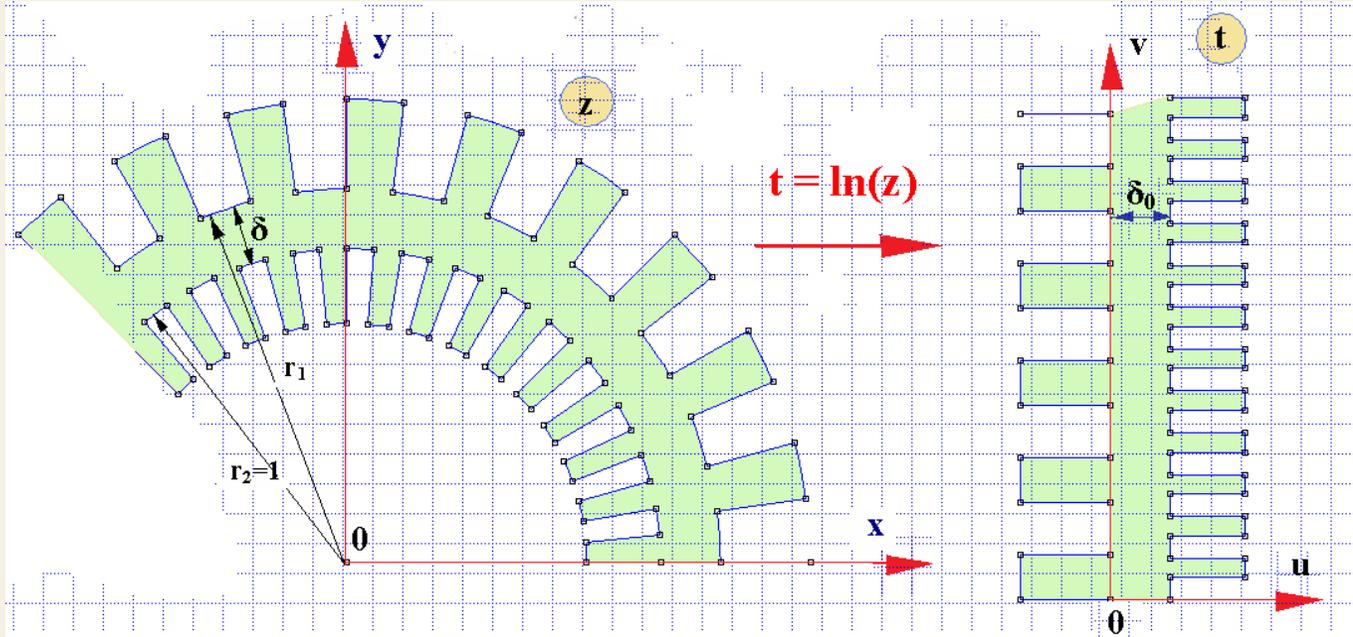
$$\begin{aligned} w_t(t) &= w_t(F(z)) = \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot t = \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot \ln(z) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot \ln(r \cdot e^{j\theta}) = \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot \ln(r) + j \frac{2}{\pi} \cdot \psi_1 \cdot \theta \end{aligned}$$

$= w_z(z)$ Функция сохранилась в преобразованных координатах



Возвращаясь к зазору ЭМ с учетом зубчатости

Применение логарифмического преобразования позволяет перейти к анализу поля в плоском зазоре



Воздушный зазор в преобразованной области

$$\delta_0 = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots = \ln(1 + \delta)$$

Если в ЭМ стенки открытых пазов направлены радиально, то в плоскости t пазы получаются прямоугольными

Если в ЭМ пазы прямоугольные, то в плоскости t они трапециевидальные (на поле в зазоре не повлияет)

Преобразование Шварца-Кристоффеля

Особый вид преобразования, при котором многоугольная область задачи отображается на верхнюю полуплоскость

Вершины многоугольника отображаются в точки на действительной оси плоскости t

α, β, γ – внутренние углы многоугольника
 α', β', γ' – дополнительные углы (до π)

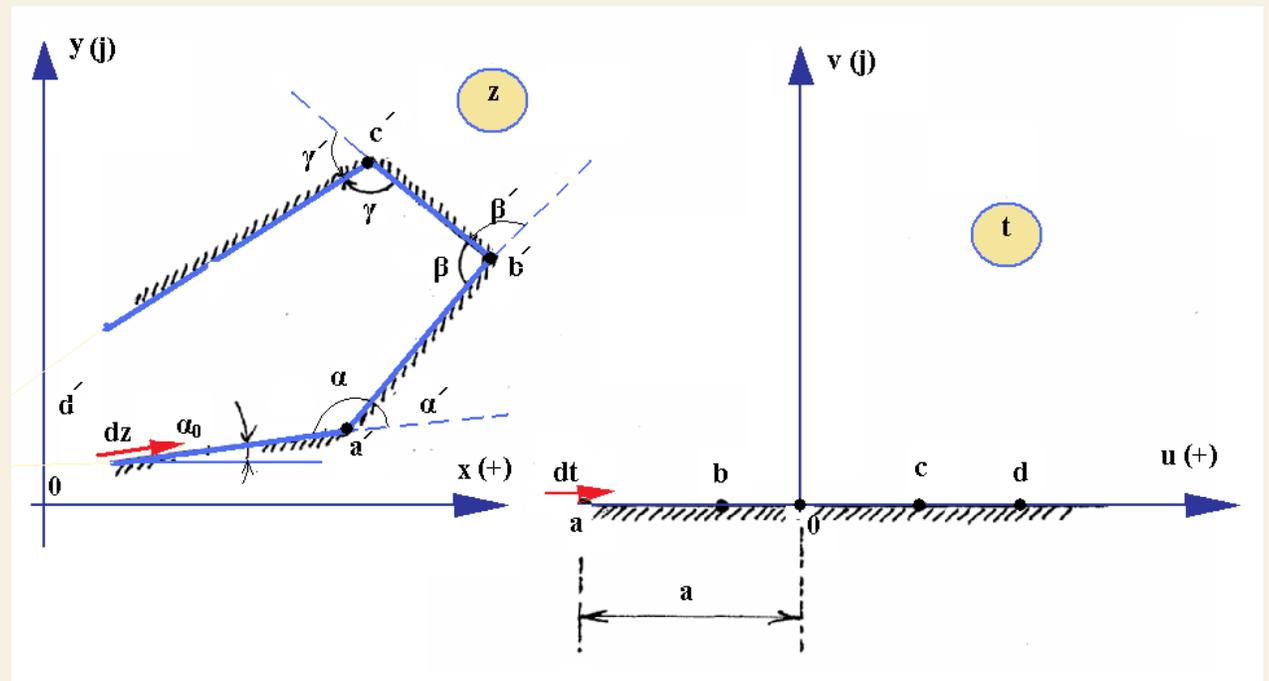
Аналитическим выражением преобразования Ш-К является решение диф. уравнения

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\left(\frac{\alpha}{\pi}-1\right)} \cdot (t-b)^{\left(\frac{\beta}{\pi}-1\right)} \cdot \dots$$

Здесь S – константа, a, b, \dots – координаты вершин в плоскости t

Удобнее записывать уравнение Ш-К через дополнительные углы

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{-\frac{\alpha'}{\pi}} \cdot (t-b)^{-\frac{\beta'}{\pi}} \cdot \dots$$



Уравнение Шварца-Кристоффеля

можно записать в виде $dz = f(t)dt$

Для определения функции преобразования координат надо интегрировать уравнение Ш-К

$$z = \int f(t)dt + K$$

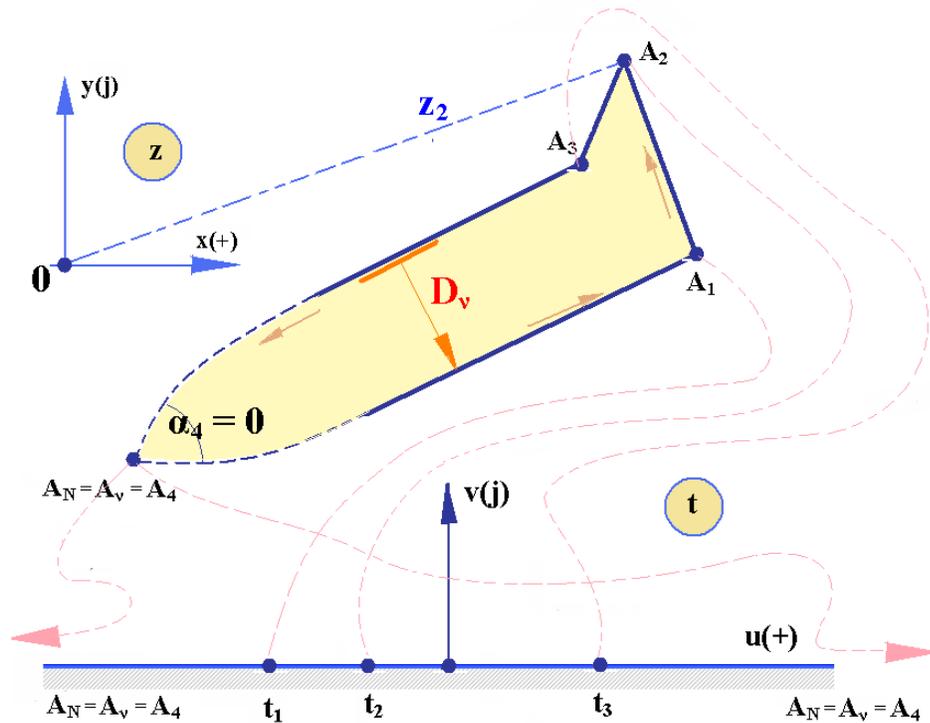
Следует определить константы S , K и координаты вершин a , b , ...

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{\alpha'}{\pi}} \cdot (t-b)^{\frac{\beta'}{\pi}} \cdot \dots$$

Для уменьшения числа сомножителей (и числа неизвестных констант) можно отображать вершины в $+\infty$ и $-\infty$

Также можно отображать в $\pm\infty$ вершины «открытых» многоугольников

Например, две параллельные прямые «пересекаются» в бесконечности под углом $\alpha_4 = 0$. Эту вершину можно отразить в $\pm\infty$, чтобы уменьшить число сомножителей в уравнении



Пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

Найти поле тока $I/2$, расположенного на расстоянии g от вершины ферромагнитного угла a' , равного $\pi/2$

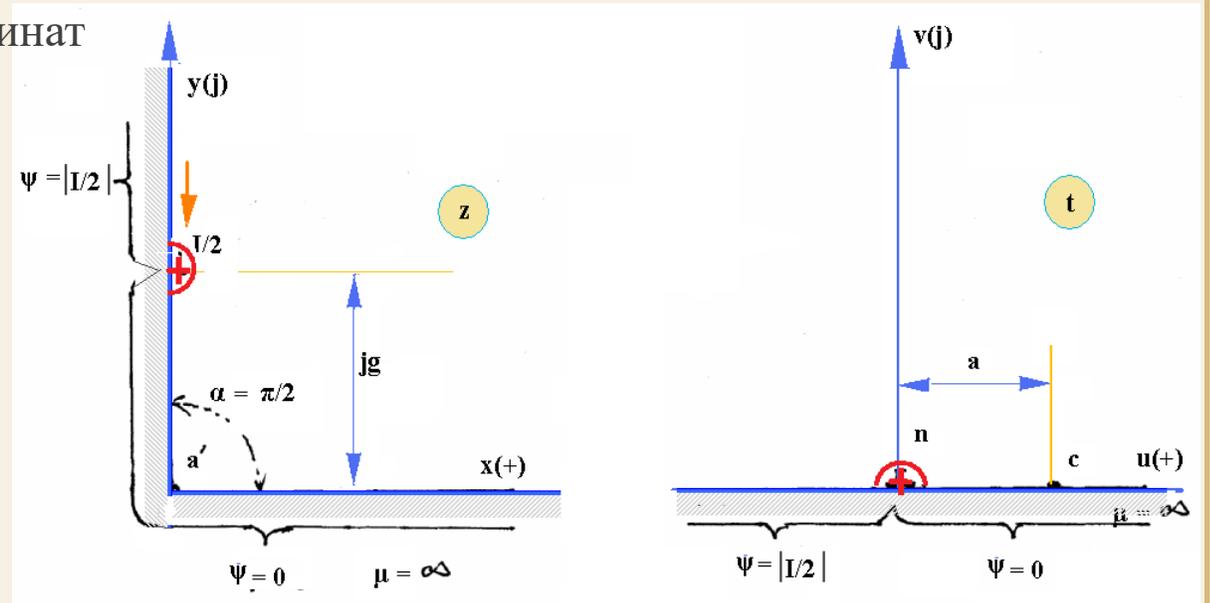
Пусть в плоскости t ток расположен в начале координат в точке n , а угол a' – в точке c на расстоянии a

Уравнение Ш-К

$$\frac{dz}{dt} = S(t-a)^{\frac{\alpha}{\pi}-1} = S(t-a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$z = S \int (t-a)^{-\frac{1}{2}} dt = S \frac{(t-a)^{\frac{1}{2}}}{1/2} + K$$

$$z = 2S(t-a)^{\frac{1}{2}} + K$$



Для поиска констант

сопоставим вершины	в пл. z	в пл. t	уравнение Ш-К
угол $a' \rightarrow c$	$z = 0$	$t = a$	$0 = 2S \cdot 0 + K \rightarrow K = 0$
ток $I/2 \rightarrow n$	$z = jg$	$t = 0$	$jg = 2S\sqrt{-a}$

Уравнение преобразования координат

$$z = (t - g^2)^{\frac{1}{2}}$$

Т.к. a – вещественное, то и $2S$ вещественное

Пусть $2S = 1$, тогда $jg = \sqrt{-a} \rightarrow a = g^2$

Пример конформного преобразования Шварца-Кристоффеля

Для решения задачи зададим граничные условия (одинаковые в z и t):

слева от тока потенциал $\psi = I/2$, справа – $\psi = 0$

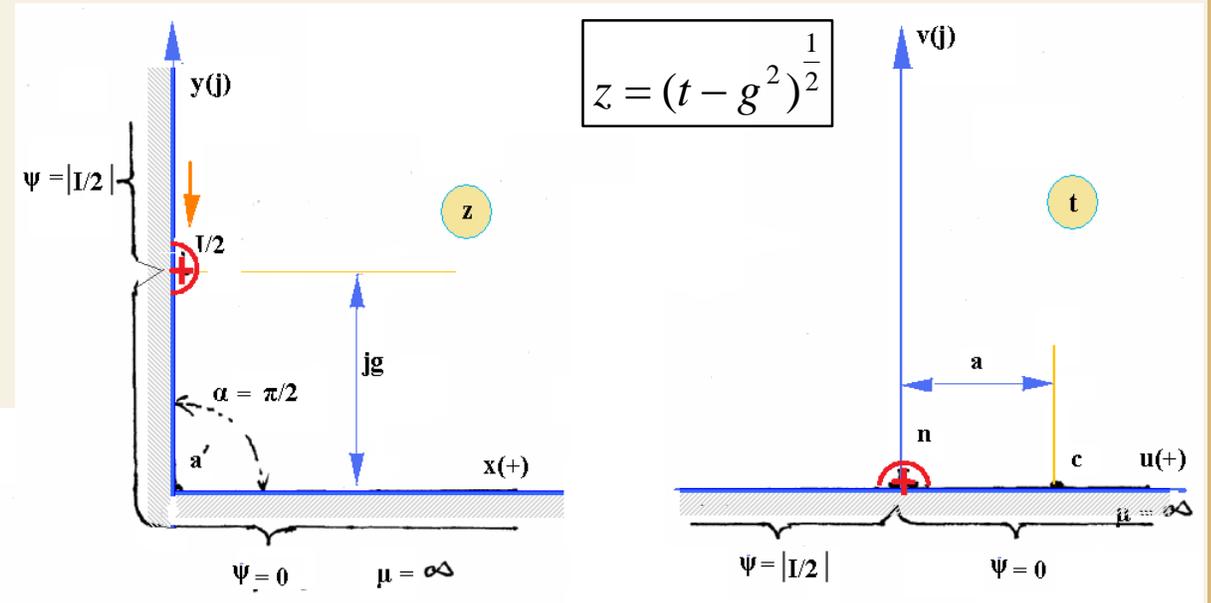
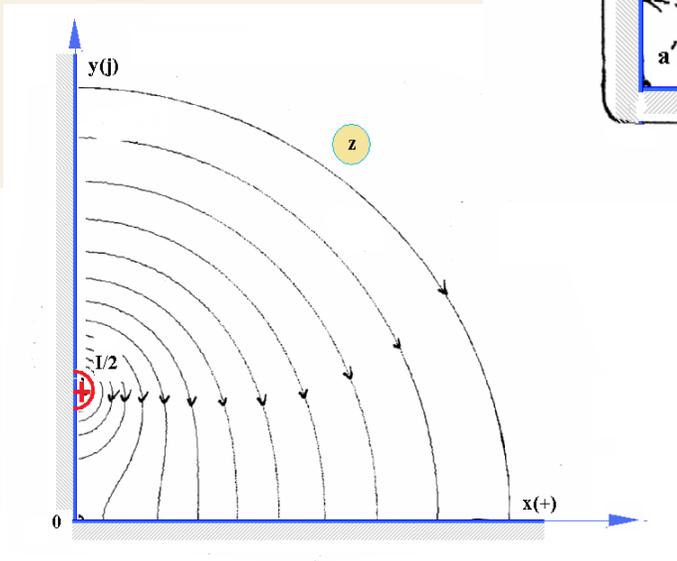
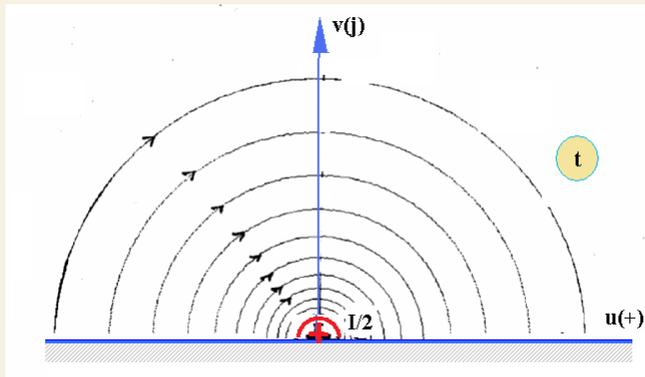
В плоскости t решение известно
(поле тока в верхней полуплоскости)

$$w = \frac{I/2}{\pi} \ln t$$

Распространим его на z с помощью $t = z^2 + g^2$

$$w = \frac{I/2}{\pi} \ln(z^2 + g^2) = \varphi + j\psi$$

Построим картины поля
(линии уровня функции потока)



Напряженность поля в плоскости z

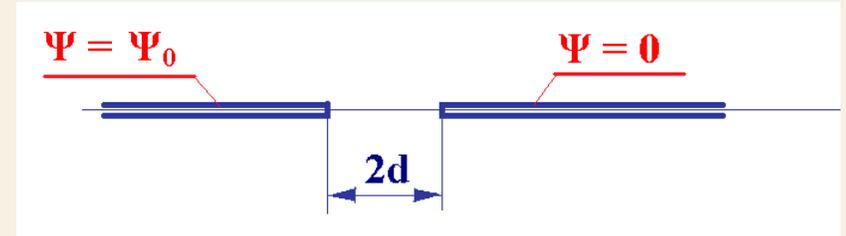
$$|H| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{I/2}{\pi} \left| \frac{2(x + jy)}{g^2 + x^2 + 2jxy - y^2} \right|$$

Одновременно решена задача о токе $2(I/2)$
над ферромагнитной поверхностью

Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Даны две намагниченные пластины на расстоянии $2d$

Пластины бесконечно тонкие с $\mu_{ст} = \infty$ и потенциалами ψ_0 и 0



В плоскости z рассмотрим четырехугольник с двумя вершинами A_2 и A_4 в ∞
Начало координат – посередине отрезка между пластинами.

Для получения требуемых потенциалов в этих вершинах разместим токи

$$i_2 = -\psi_0 \text{ и } i_4 = +\psi_0$$

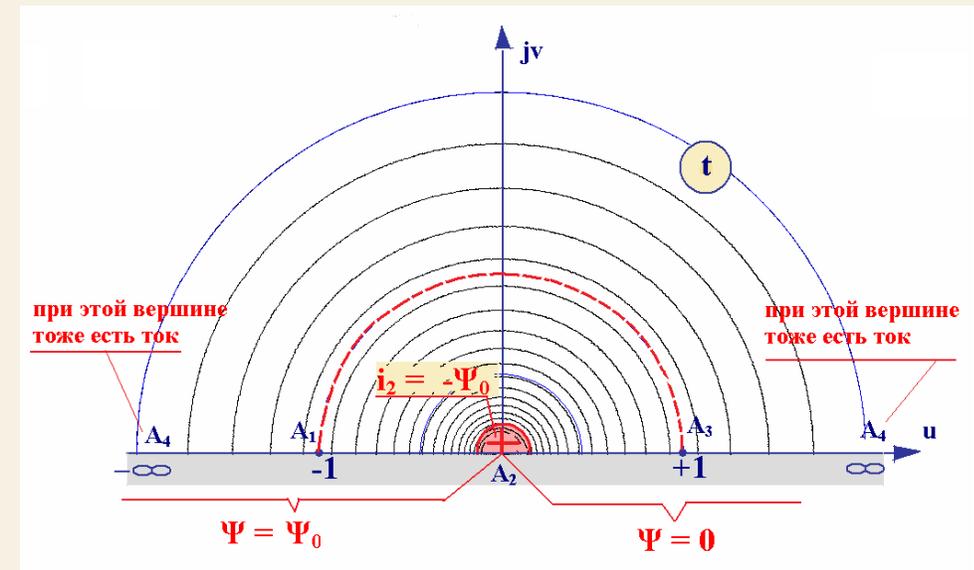
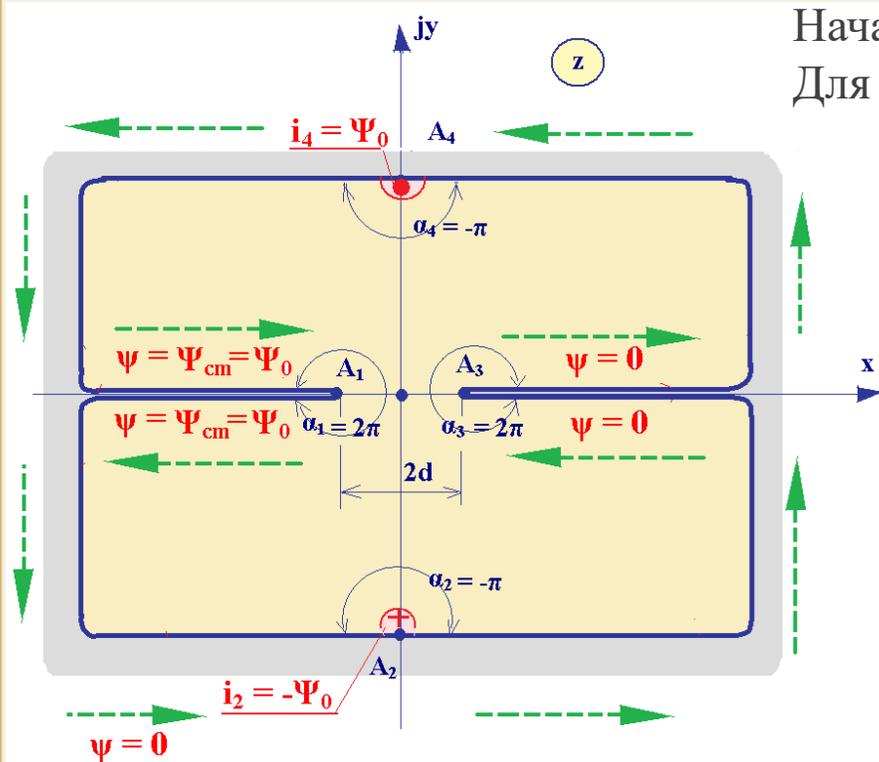
Отобразим
четыреугольник
на вещественную
ось плоскости t :

$$A_2 \text{ на } t_2 = 0$$

$$A_1 \text{ на } t_1 = -1$$

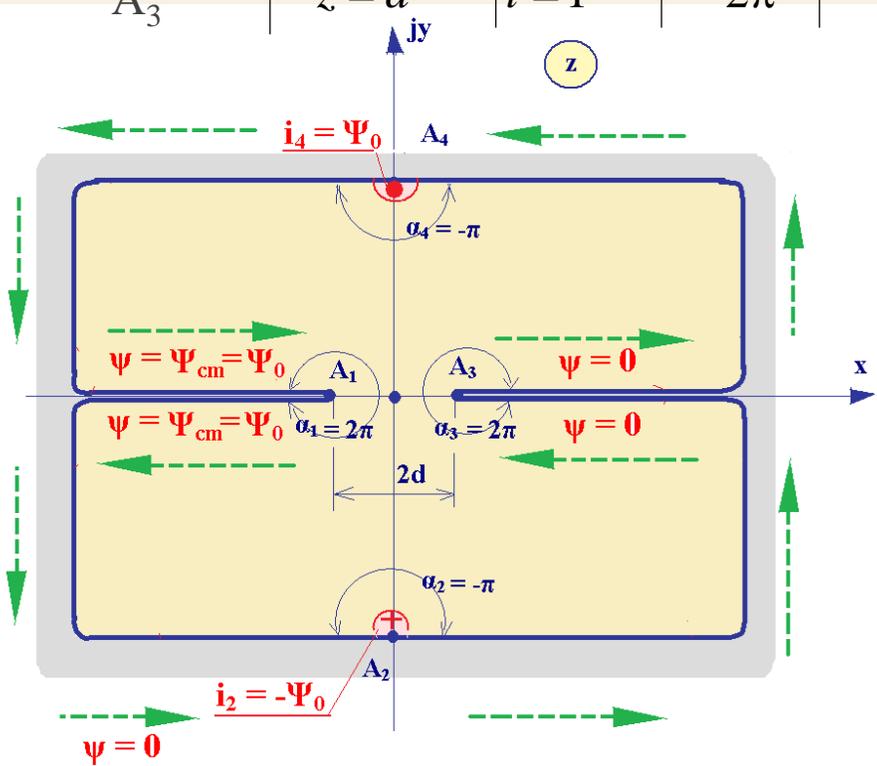
$$A_3 \text{ на } t_3 = +1$$

$$A_4 \text{ на } t_4 = \pm\infty$$



Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

сопоставим вершины	в пл. z	в пл. t	угол α_k	доп.угол α'_k	степень $-\alpha'_k/\pi$
A_1	$z = -d$	$t = -1$	2π	$-\pi$	1
A_2	$z = -j\infty$	$t = 0$	$-\pi$	2π	-2
A_3	$z = d$	$t = 1$	2π	$-\pi$	1



Неизвестные найдем по вершинам A_1 и A_3

$$A_1: z_1 = -d = S(-1-1)+K = -2S+K$$

$$A_3: z_3 = +d = S(1+1)+K = 2S+K$$

откуда

$$2S-K = 2S+K \rightarrow K = 0$$

$$d = 2S \rightarrow S = d/2$$

Тогда преобразование

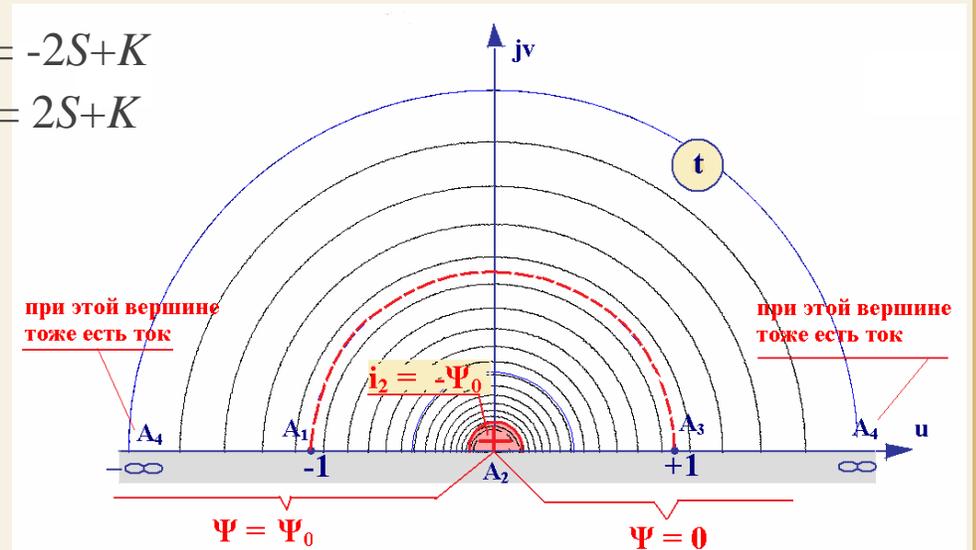
$$z = \frac{d}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) = \frac{d(t^2 + 1)}{2t}$$

Уравнение Шварца-Кристоффеля

$$\frac{dz}{dt} = S(t+1)^1 t^{-2} (t-1)^1 = S \frac{t^2-1}{t^2} = S \left(1 - \frac{1}{t^2} \right)$$

Преобразование координат

$$z = \int S \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) dt + K = S \left(t + \frac{1}{t} \right) + K$$



Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Найдем обратное преобразование координат $t = F(z)$ $z = \frac{d(t^2 + 1)}{2t} \rightarrow 2t \cdot z = dt^2 + d \rightarrow dt^2 - 2tz + d = 0$

$$t = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4d \cdot d}}{2d}$$

Для использования верхней полуплоскости выбираем «+», тогда

$$t = \frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1}$$

Решение задачи в плоскости t : задача о токе $i = \Psi_0$ на ферромагнитной поверхности

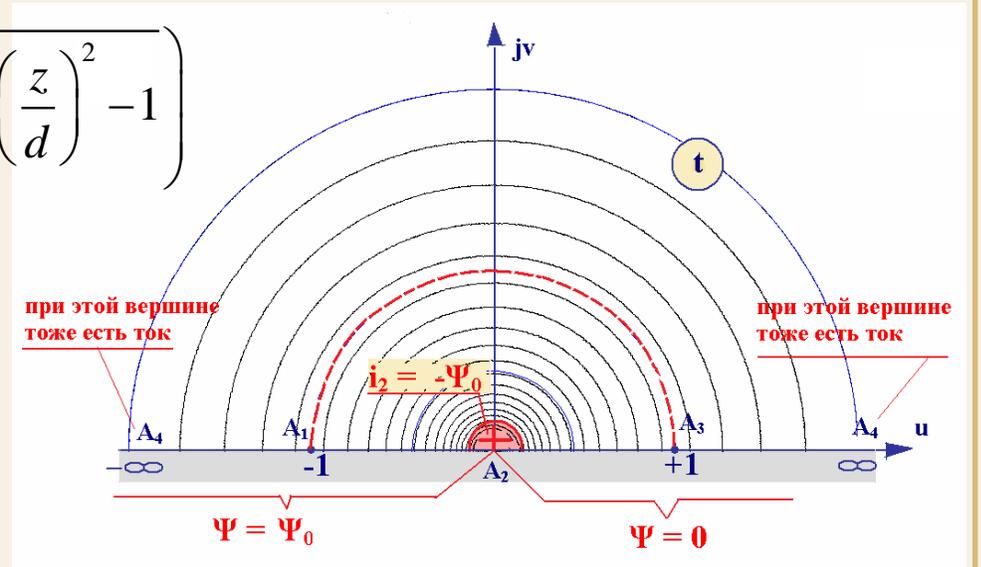
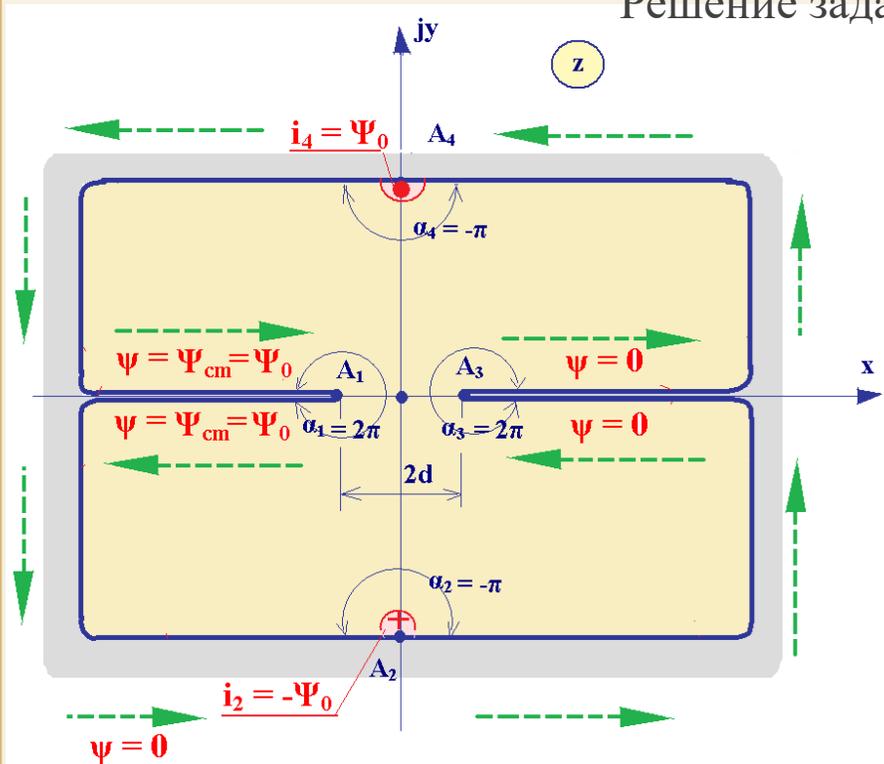
$$w_t = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln(t)$$

Линии поля – окружности вокруг тока

Найдем решение в плоскости z

$$w_z = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln\left(\frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1}\right)$$

$$w_z = \frac{\Psi_0}{\pi} \operatorname{arch}\left(\frac{z}{d}\right)$$



Пример 2: задача о поле двух намагниченных пластин

Найдем обратное преобразование координат $t = F(z)$ $z = \frac{d(t^2 + 1)}{2t} \rightarrow 2t \cdot z = dt^2 + d \rightarrow dt^2 - 2tz + d = 0$

$$t = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4d \cdot d}}{2d}$$

Для использования верхней полуплоскости выбираем «+», тогда

$$t = \frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1}$$

Решение задачи в плоскости t : задача о токе $i = \psi_0$ на ферромагнитной поверхности

$$w_t = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln(t)$$

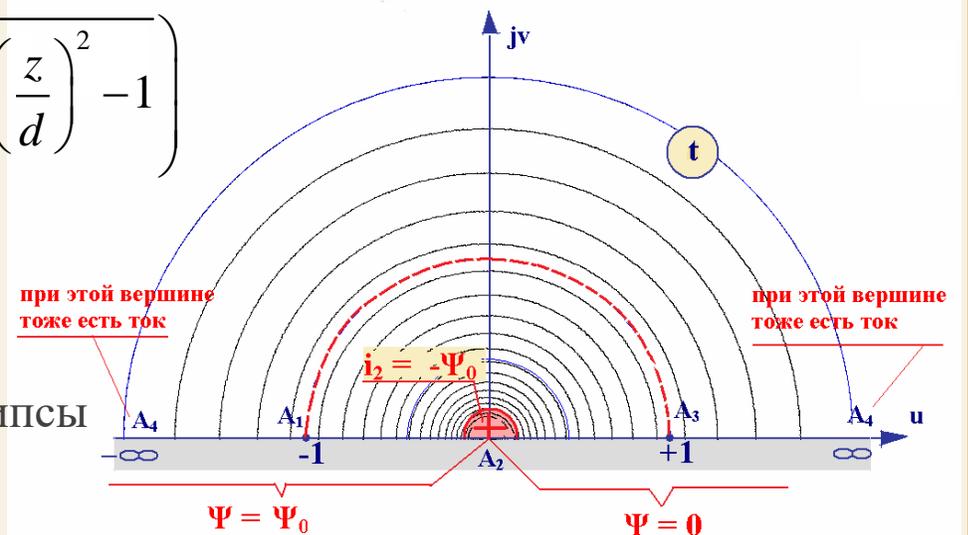
Линии поля – окружности вокруг тока

Найдем решение в плоскости z

$$w_z = \frac{\Psi_0}{\pi} \ln \left(\frac{z}{d} + \sqrt{\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1} \right)$$

$$w_z = \frac{\Psi_0}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{z}{d} \right)$$

Линии поля – эллипсы



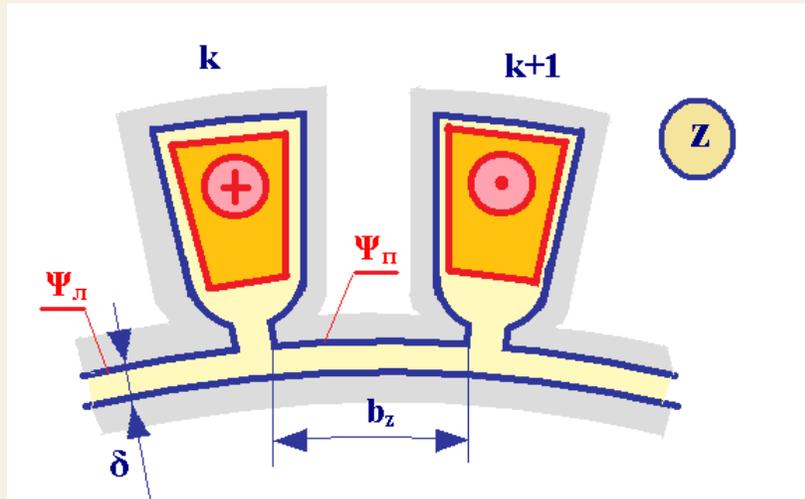
Упрощенная модель паза

Рассматриваем поле в зазоре ЭМ от токов в пазах первого сердечника при гладком втором сердечнике (магнитная цепь линейна, зазор прямолинейный)

Распределенная система токов создает периодическое поле в зазоре ($\Sigma\Phi = 0$)

При $\mu_{ст} \gg 1$ поверхность зубца имеет потенциал $\psi = \text{Const}$

Распределение токов определяет распределение потенциалов зубцов



b_z – ширина зубца на уровне зазора

Ψ_L, Ψ_P – потенциалы левого и правого зубцов

(скалярный магнитный потенциал)

Поле под зубцом равномерно и изменяется только под пазом

Поле под пазом определяется потенциалами соседних зубцов и размерами зубцовой зоны

Влияние соседних пазов можно не учитывать при $b_z \geq 3\delta$

На поле в зазоре не влияет форма паза и расположение тока в нем

Рассматриваем один паз с током i , остальные пазы в ∞

Вместо распределения токов – потенциалы зубцов $\Psi_{\text{л}}$ и $\Psi_{\text{п}}$

Причем, $\Psi_{\text{л}} - \Psi_{\text{п}} = i$

$b_{\text{ш}}$ – ширина шлица (раскрытие паза)

$h_{\text{ш}}$ – высота шлица

$h_{\text{п}}$ – высота (глубина) паза

h – глубина расположения тока в пазу

Форма паза не влияет на поле в зазоре (если $h_{\text{ш}} > 0,5b_{\text{ш}}$)

→ рассматриваем прямоугольный паз шириной $b_{\text{ш}}$

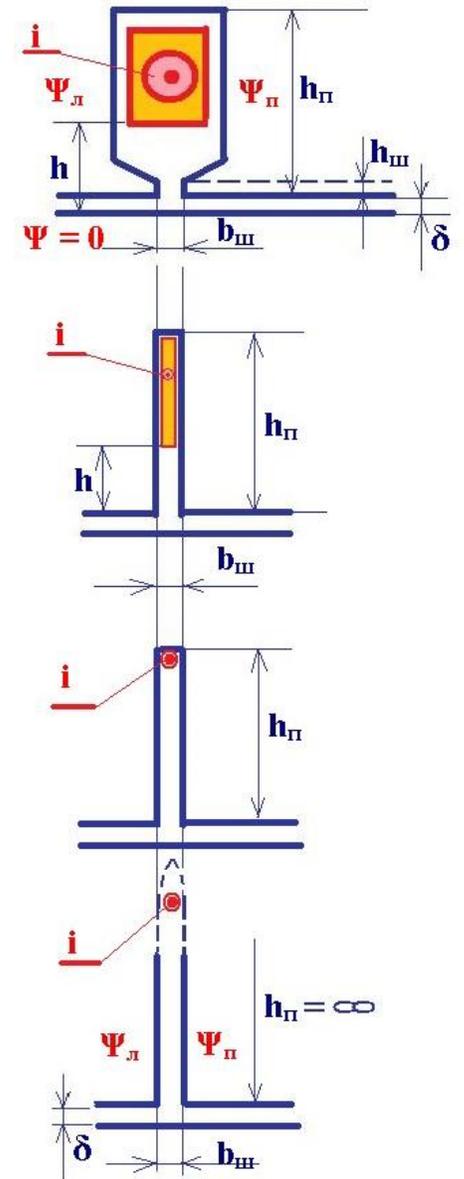
Положение тока в пазу не влияет на поле в зазоре (если $h > 0,6b_{\text{ш}}$)

→ рассматриваем точечный ток на дне паза

Раз уж положение тока в пазу не влияет на поле в зазоре (если $h_{\text{п}} > 1,5b_{\text{ш}}$)

→ рассматриваем бесконечно глубокий паз с точечным током на дне

Поле в идеализированном пазу можно найти аналитически



Четное и нечетное поле

Сложное поле в зазоре сведено к набору полей под идеализированными пазами с граничными условиями $\psi_{\text{л}} - \psi_{\text{п}} = i$ (на гладком сердечнике примем $\psi = 0$)

Поле идеализированного паза равно сумме двух симметричных полей:

- нечетное поле s от тока i (полагая остальные токи отсутствующими)
 - потенциалы зубцов одинаковые, но разного знака $+\psi_{sm}$ и $-\psi_{sm}$
- четное поле c от всех остальных токов (полагая ток $i = 0$)
 - потенциалы зубцов одинаковые $+\psi_{cm}$ и $+\psi_{cm}$

Потенциалы зубцов сохраняются

$$\psi_{\text{л}} = \psi_{cm} + \psi_{sm}$$

$$\psi_{\text{п}} = \psi_{cm} - \psi_{sm}$$

Тогда для четного поля
$$\psi_{cm} = \frac{\psi_{\text{л}} + \psi_{\text{п}}}{2} = \psi_{\text{ср}}$$

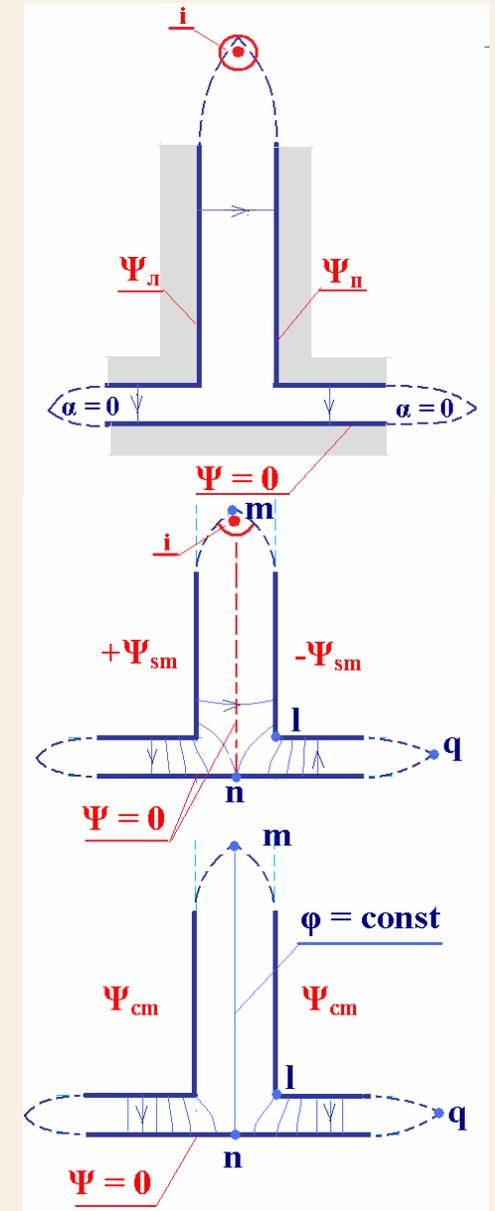
для нечетного поля
$$\psi_{sm} = \frac{\psi_{\text{л}} - \psi_{\text{п}}}{2} = \frac{i}{2}$$

заметим

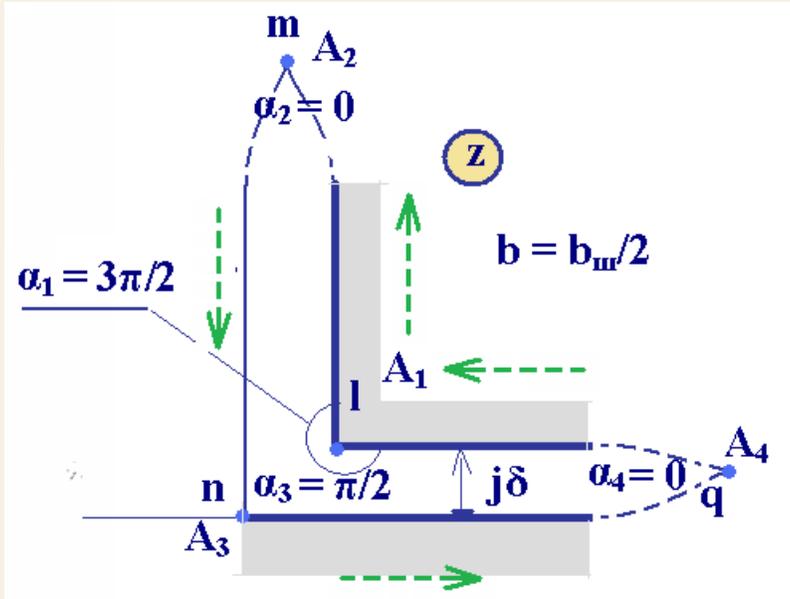
$$\psi_{\text{л}} = \psi_{\text{ср}} + i/2$$

$$\psi_{\text{п}} = \psi_{\text{ср}} - i/2$$

Каждое симметричное поле в идеализированном пазу рассмотрим аналитически



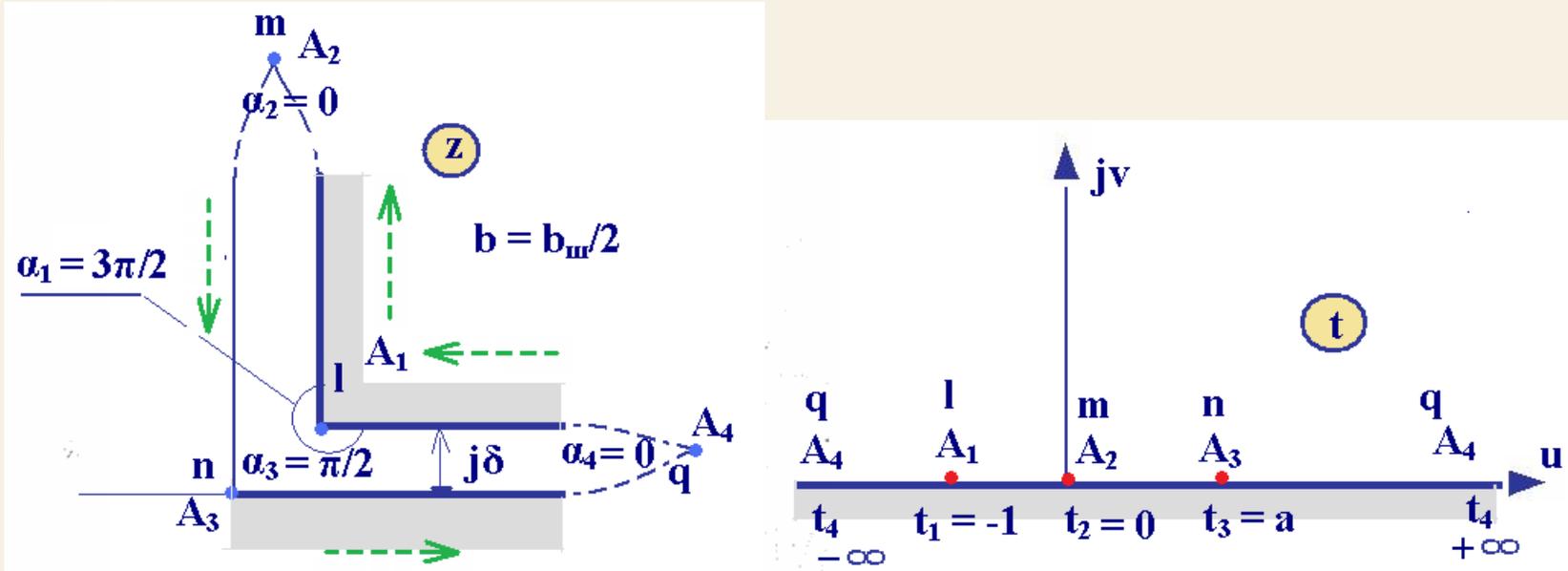
Для симметричного поля достаточно рассмотреть половину паза



Воспользуемся преобразованием Шварца-Кристоффеля для вырожденного многоугольника $lmnq$ ($A_1-A_2-A_3-A_4$)

Граничные условия	нечетное поле	четное поле
ось паза mn	$\psi = 0$	$\varphi = \text{const}$
гладкий сердечник nq	$\psi = 0$	$\psi = 0$
правый зубец ql и lm	$\psi = \psi_{sm} = i/2$	$\psi = \psi_{cm} = \psi_{cp}$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза



Пусть $t_1 = -1, t_2 = 0, t = a$ (надо найти)

сопоставим

вершины	в пл. z	в пл. t	угол α_k	степень $\alpha_k/\pi-1$
A_1	$z = b + j\delta$	$t = -1$	$3/2 \cdot \pi$	$1/2$
A_2	$z = j\infty$	$t = 0$	0	-1
A_3	$z = 0$	$t = a$	$\pi/2$	$-1/2$

Уравнение Ш-К

$$\frac{dz}{dt} = S (t - (-1))^{\frac{1}{2}} (t - 0)^{-1} (t - a)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{S}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} = \frac{S}{t\eta} \quad \text{где } \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

Итак, надо найти $z = \int dz + K = \int \frac{S}{t\eta} dt + K$

η - иррациональное выражение, сделаем подстановку

$$\frac{S}{t\eta} dt = \frac{S}{t\eta} \frac{dt}{d\eta} d\eta$$

Надо выразить t через η , найти производную, подставить и проинтегрировать

Из выражения η для $\eta^2 = \frac{t-a}{t+1}$ получим $t = \frac{a+\eta^2}{1-\eta^2}$

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{2\eta}{1-\eta^2} - \frac{(a+\eta^2)(-2\eta)}{(1-\eta^2)^2} = \frac{2\eta - 2\eta^3 + 2\eta a + 2\eta^3}{(1-\eta^2)^2} = \frac{2\eta(1+a)}{(1-\eta^2)^2}$$

Подставим в уравнение Ш-К $dz = \frac{S}{t\eta} dt = \frac{S}{t\eta} \frac{dt}{d\eta} d\eta = \frac{S(1-\eta^2)2\eta(1+a)}{(a+\eta^2)\eta(1-\eta^2)^2} d\eta = 2S \frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} d\eta$

Представим правильную дробь в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} = \frac{A+B\eta}{(a+\eta^2)} + \frac{C+D\eta}{(1-\eta^2)}$$

Найдем коэффициенты A, B, C и D

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

Найдем коэффициенты A, B, C и D

$$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} = \frac{A+B\eta}{(a+\eta^2)} + \frac{C+D\eta}{(1-\eta^2)} = \frac{(A+aC) + \eta(B+aD) + \eta^2(C-A) + \eta^3(D-B)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях η

- $\eta^0: A+aC = 1+a$
- $\eta^1: B+aD = 0$
- $\eta^2: C-A = 0 \rightarrow A = C$, тогда из 1-го равенства $A(1+a) = 1+a$, значит $A = 1$ и $C = 1$
- $\eta^3: D-B = 0 \rightarrow B = D$, тогда из 2-го равенства $B(1+a) = 0$, но a не может быть равно -1 , значит $B = 0$ и $D = 0$

Преобразованная дробь
$$\frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} = \frac{A+B\eta}{(a+\eta^2)} + \frac{C+D\eta}{(1-\eta^2)} = \frac{1}{(a+\eta^2)} + \frac{1}{(1-\eta^2)}$$

Перепишем уравнение Ш-К
$$dz = 2S \frac{(1+a)}{(a+\eta^2)(1-\eta^2)} d\eta = 2S \left(\frac{1}{a+\eta^2} + \frac{1}{1-\eta^2} \right) d\eta$$

Теперь можно найти преобразование координат
$$z = \int dz + K$$

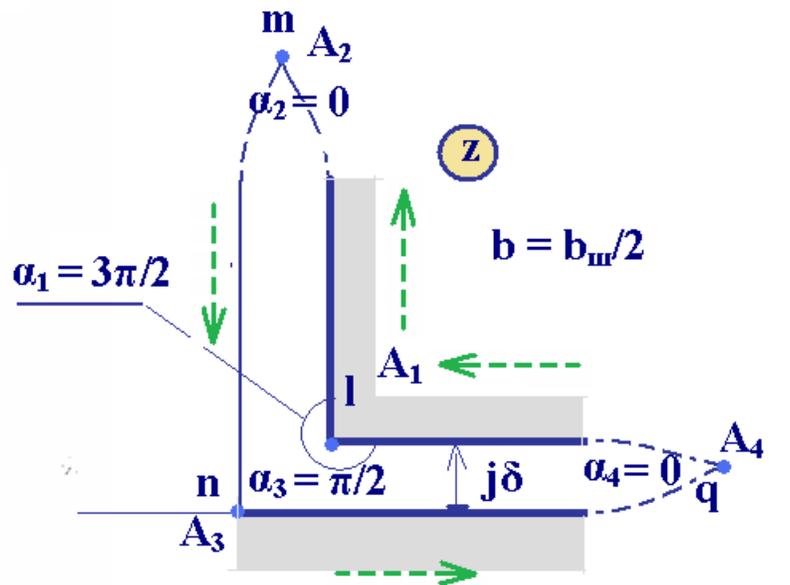
Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

$$\text{Итак } z = \int dz + K = \int 2S \left(\frac{1}{a+\eta^2} + \frac{1}{1-\eta^2} \right) d\eta + K = 2S \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right) \right) + K$$

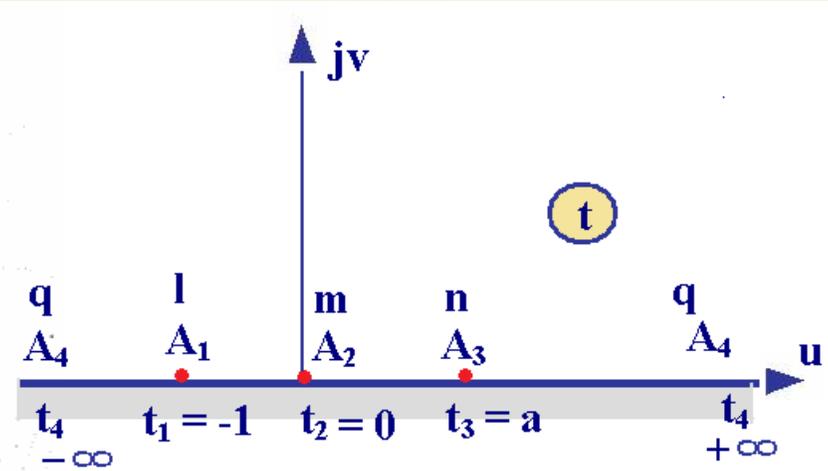
Осталось найти неизвестные a , S и K

Запишем соответствие координат в вершинах многоугольника

$$1) \text{ Для вершины } n \text{ (точка } A_3): z_3 = 0, t_3 = a, \eta_3 = \sqrt{\frac{t_3 - a}{t_3 + 1}} = \sqrt{\frac{a - a}{a + 1}} = 0$$



Подставим в преобразование $z = f(t)$: $0 = 2S(0+0)+K \rightarrow K = 0$



2) Для вершины q (точка A_4):
т.к. $z_4 = \infty$ и $t_4 = \infty$ используем
особое выражение для
расстояния между
параллельными сторонами

$$D_4 = j\delta = j\pi S$$

откуда $S = \frac{\delta}{\pi}$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

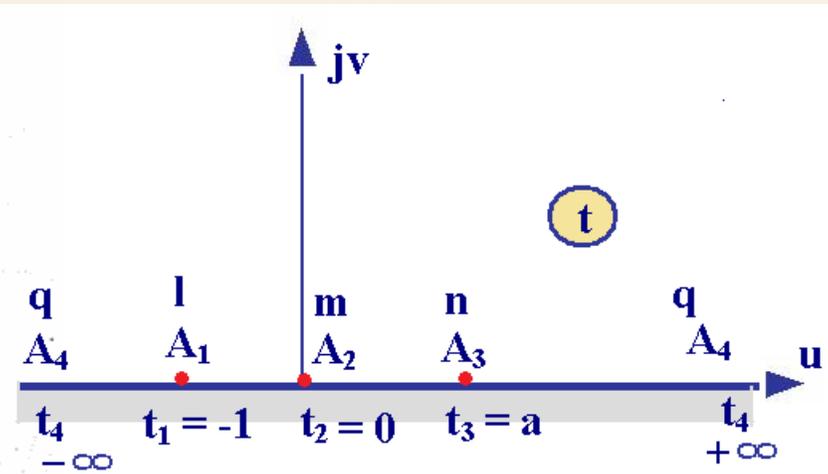
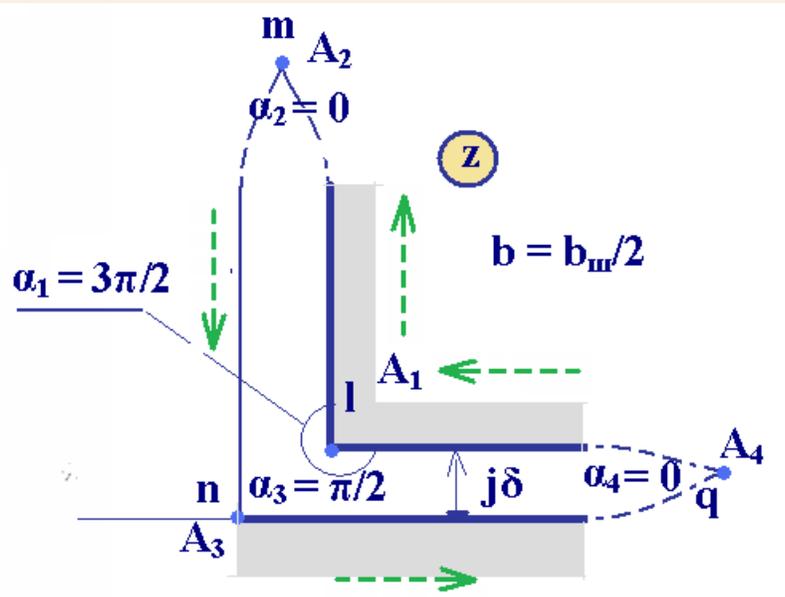
3) Для вершины m (точка A_2): $z_2 = j\infty$, $t_2 = 0$ используем другое особое выражение для параллельных сторон

$$D_2 = -b = j\pi S (t_2 + 1)^{\frac{1}{2}} (t_2 + a)^{-\frac{1}{2}} = j\pi S \frac{1}{\sqrt{-a}}$$

Подставляя найденное S , получим $-b = j\pi \frac{\delta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{-a}}$ откуда $a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$

Окончательное выражение для функции преобразования координат $z = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\eta}{\sqrt{a}} \right) + \operatorname{arctg}(\eta) \right)$

$$\text{где } \eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$$



или так

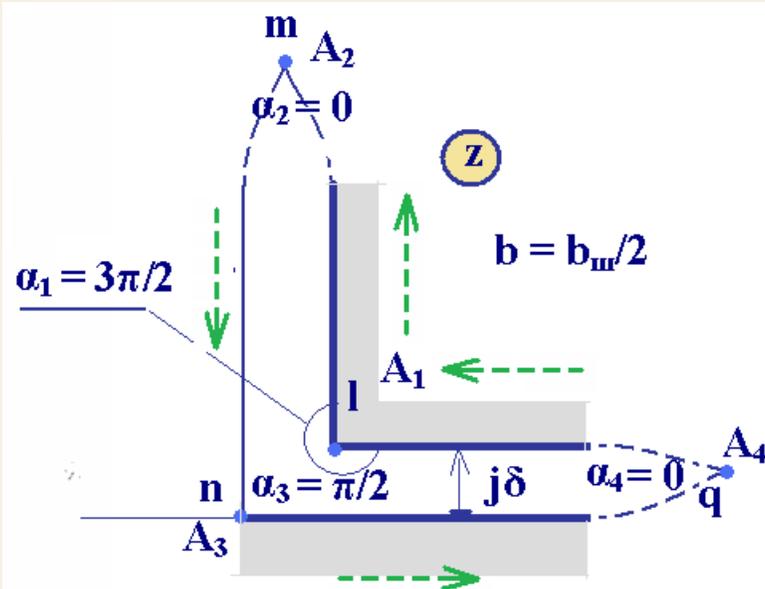
$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

Уравнение Шварца-Кристоффеля для половины паза

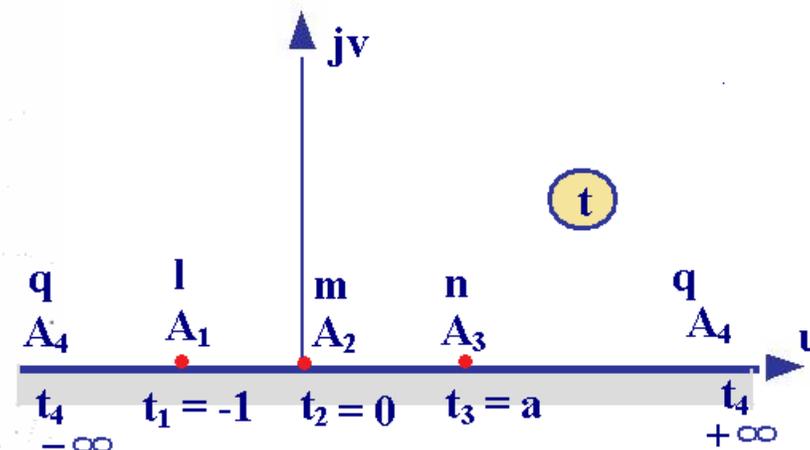
Выражение для функции преобразования координат позволяет перенести решение из плоскости t в плоскость z

$$z = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

Т.е. найдя решение в плоскости t можно построить линии поля и перенести их в плоскость z «по точкам», получив картину поля в плоскости z



Чтобы найти значения величин поля в нужной точке в z , надо знать преобразование координат $t \rightarrow z$



К сожалению, выразить t через z аналитически не удастся

Четное и нечетное поля паза

Нечетное поле – поле от тока $i/2$ на дне паза (в точке m или $A_2 \rightarrow t_2 = 0$)

В плоскости t это поле тока $i/2$ в верхней полуплоскости: $w_t = \varphi + j\psi = \frac{i/2}{\pi} \ln t = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln t$
 линии поля – полуокружности

В случае $b > \delta$ переменная $a = (\delta/b)^2 < 1$ и координата $t_3 = a < 1$

От $t_2 = 0$ до $t_3 = a$

– поток пазового рассеяния

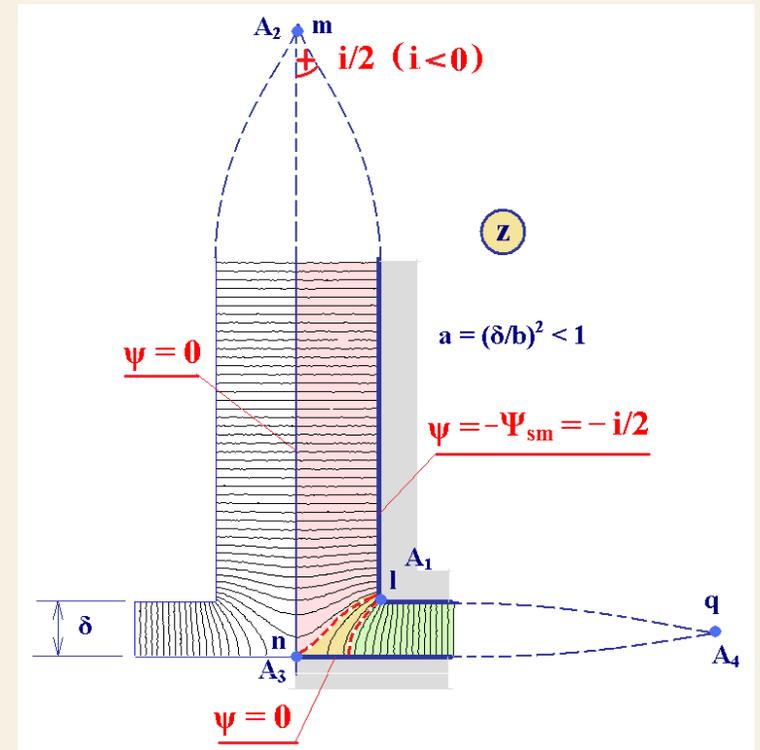
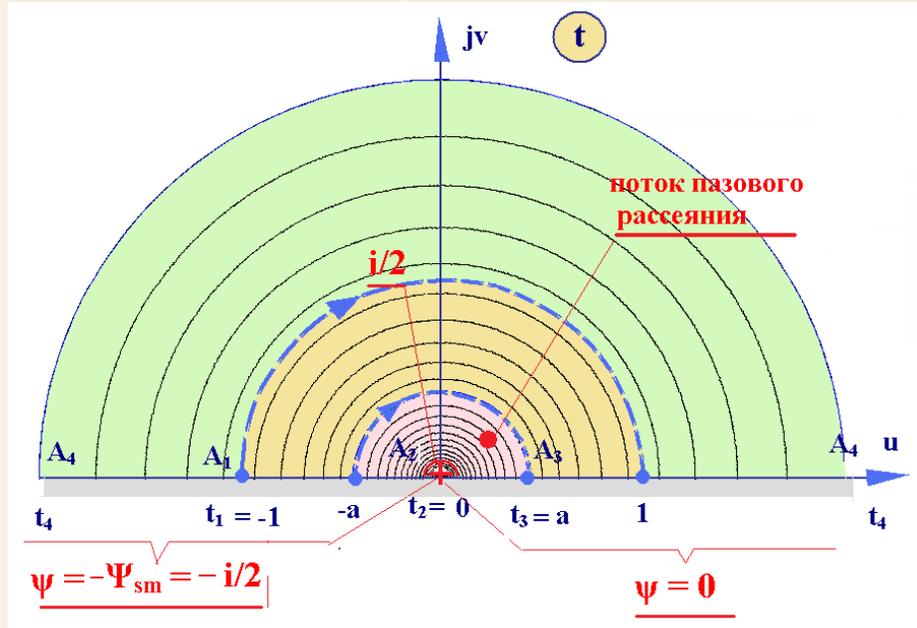
От $t_1 = -1$ до $t_4 = -\infty$

– поток взаимоиנדукции

Для переноса решения в z
 используем преобразование

$$w_z = w_t(t) = w_t(F(z))$$

по точкам или найдя $t = F(z)$



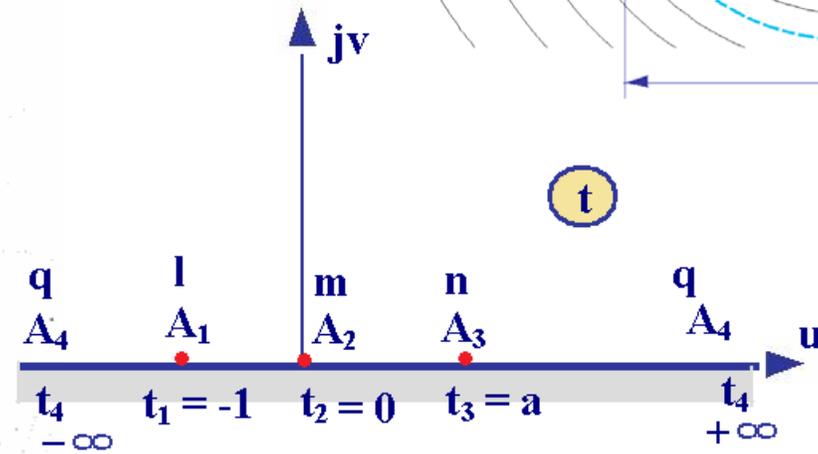
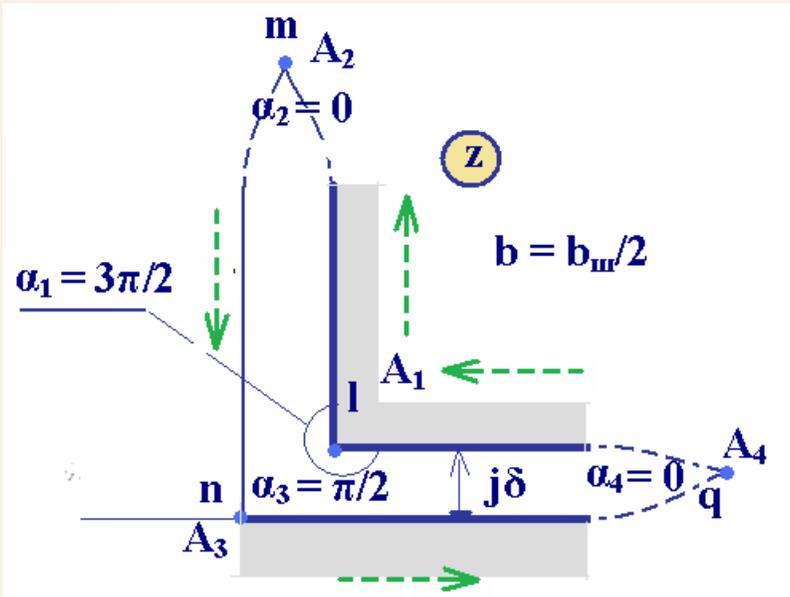
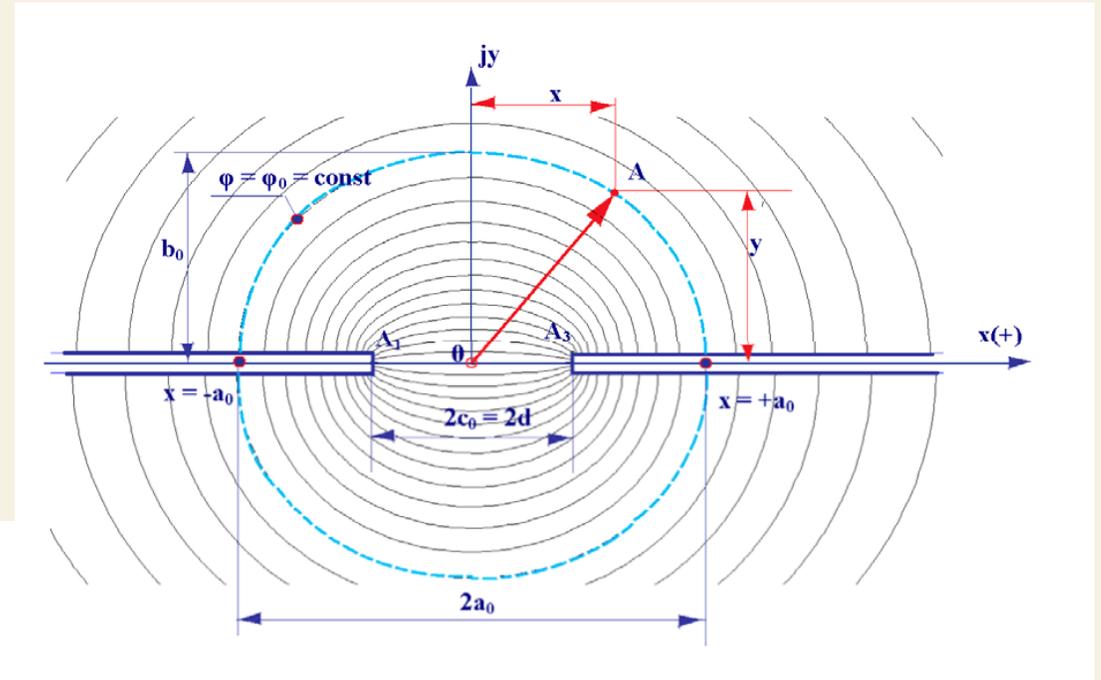
Четное поле – поле от возбужденного зубца

В плоскости t это поле двух намагниченных пластин:

- зубец $A_4 - A_1 - A_2$ с $\psi = \psi_{cm} \rightarrow$ точки $t_4 - t_1 - t_2$
- сердечник $A_3 - A_4$ с $\psi = 0 \rightarrow$ точки $t_3 - t_4$

Решение задачи $w = \frac{\Psi_0}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{z}{d} \right)$

Линии поля в форме эллипсов



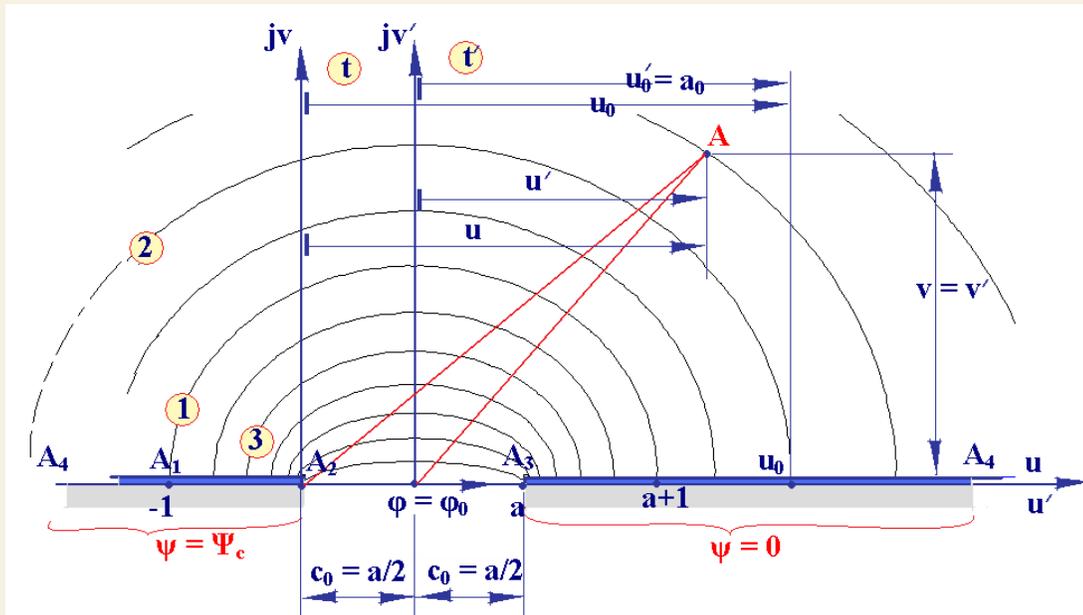
Четное поле – поле от возбужденного зубца

Для использования готового решения четное поле в плоскости t преобразуем в плоскость t' ($t' = t - a/2$) и запишем решение

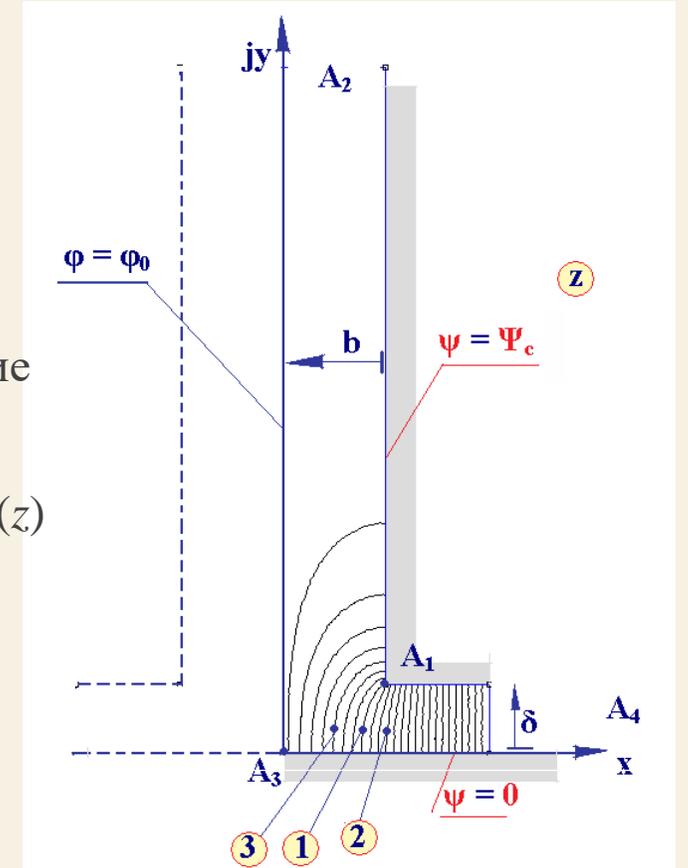
$$w_{t'} = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{t'}{a/2} \right)$$

Чтобы перенести решение в t , надо подставить $t' = t - a/2$ и получить (линии поля – эллипсы)

$$w_t = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{2}{a} \left(t - \frac{a}{2} \right) \right)$$



Для переноса решения в z используем преобразование $w_z = w_t(t) = w_t(F(z))$ по точкам или найдя $t = F(z)$



Напряженность магнитного поля

Найдем напряженность через комплексную потенциальную функцию w_z

Сопряженный комплекс напряженности магнитного поля связан с производной комплексной потенциальной функции

$$\bar{H} = j \frac{dw}{dz} \quad \text{тогда} \quad H = \bar{\bar{H}}$$

(Сопряженные комплексные числа имеют одинаковый модуль и одинаковые, но противоположные по знаку аргументы / одинаковую действительную часть и одинаковые, но разные по знаку мнимые части)

Ранее были найдены выражения для w в плоскости t , но аналитическое выражение для w_z найти не удастся

Зато получено выражение для производной dz/dt (уравнение Шварца-Кристоффеля)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{S}{t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} \quad \text{где} \quad S = \frac{\delta}{\pi} \quad a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Найдем производную w так

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \frac{dt}{dz}$$

Напряженность четного поля

Комплексная потенциальная функция $w_t = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{2}{a} \left(t - \frac{a}{2} \right) \right) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch} \left(\frac{2t}{a} - 1 \right) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch} (t_1)$

Для нее

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dw}{dt_1} = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t_1^2 - 1}} = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \frac{a/2}{\sqrt{t(t-a)}} \\ \frac{dt_1}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2t}{a} - 1 \right) = \frac{2}{a} = \frac{1}{a/2} \\ \frac{dt}{dz} = \left(\frac{dz}{dt} \right)^{-1} = \frac{t}{S} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \end{array} \right.$$

с учетом $S = \frac{\delta}{\pi}$ получим $\bar{H}_c = j \frac{dw}{dz} = j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} = j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \beta_c$

Напряженность нечетного поля

Комплексная потенциальная функция $w_t = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln t$

Для нее $\frac{dw}{dt} = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \frac{1}{t}$ $\frac{dt}{dz} = \frac{\pi t}{\delta} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$ получим $\bar{H}_s = j \frac{dw}{dz} = j \frac{\Psi_{sm}}{\delta} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} = j \frac{\Psi_{sm}}{\delta} \beta_s$

Окончательно, модуль напряженности $|H| = |\bar{H}|$ и аргумент $\arg(H) = -\arg(\bar{H})$

Распределение напряженности вдоль гладкого сердечника

Рассмотрим четное поле $\bar{H} = j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} = j \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \beta_c$

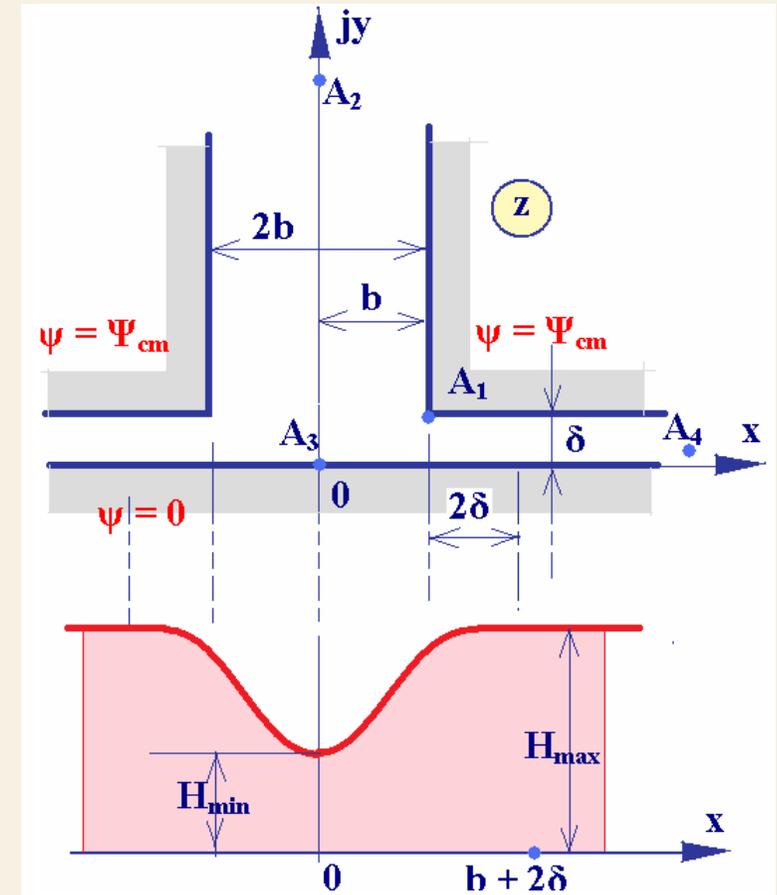
Вдоль гладкого сердечника аргумент напряженности везде равен $-\pi/2$, т.е. линии поля входят перпендикулярно, нормальная составляющая напряженности равна ее модулю

- задаемся β_c в диапазоне от $\sqrt{\frac{a}{a+1}}$ до 1
- находим соответствующую координату $t = \frac{\beta_c^2}{1-\beta_c^2}$
- вычисляем $\eta = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$
- находим координату x через уравнение преобразования

$$x = z = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\eta}{1-\eta} \right)$$

- находим для этой точки модуль напряженности

$$|H_c| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right|$$



Распределение H симметрично относительно оси паза

Распределение напряженности вдоль гладкого сердечника

Характерные точки

- точка A_3 : $(x = 0, t = a)$ $|H_c| = |H_{\min}| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \sqrt{\frac{a}{a+1}} \right|$ где $a = \left(\frac{\delta}{b} \right)^2$

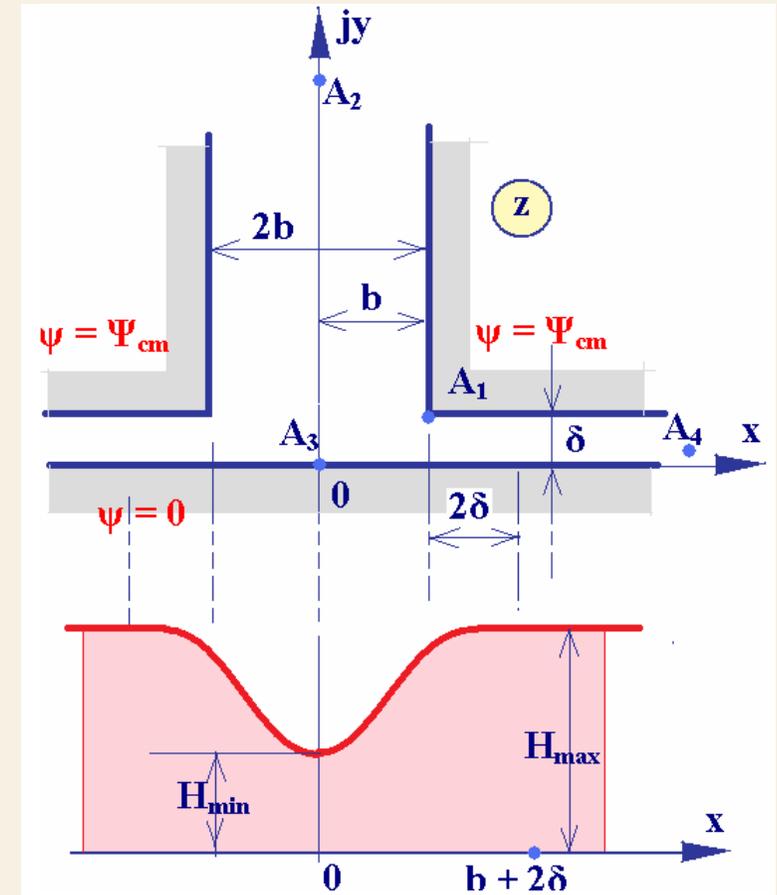
Раскрытие паза уменьшает напряженность поля тем сильнее, чем больше b/δ

- точка A_4 : $(x = \infty, t = \infty)$ $|H_c| = |H_{\max}| = \left| \frac{\Psi_{cm}}{\delta} \right|$

Поле под зубцом максимально

- точка $x = b+2\delta$ $|H_c| = 0.9995 |H_{\max}|$

Влияние паза на поле в зазоре быстро уменьшается под зубцом



Удельная магнитная проводимость зазора

Удельная магнитная проводимость зазора (в точке на ед.длины)
численно равна H на поверхности при единичной разности потенциалов [м^{-1}]

- для четного поля $\lambda_c = \frac{H_{c(y=0)}}{\Psi_{cm}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

- для нечетного поля $\lambda_s = \frac{H_{s(y=0)}}{\Psi_{sm}} = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t-a}{t+1}}$

Максимальная удельная проводимость зазора
– под зубцом

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$$

$$(\lambda_{c\max} = \lambda_{c(t \rightarrow \infty)} = \lambda_{s\max} = \lambda_{\max})$$

Относительная удельная магнитная проводимость зазора – относительно λ_{\max}

- для четного поля $\frac{\lambda_c}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t}{t+1}} = \beta_c$

$$\beta_{c\max} = \beta_{s\max} = 1$$

- для нечетного поля $\frac{\lambda_s}{\lambda_{\max}} = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} = \beta_s (= \eta)$

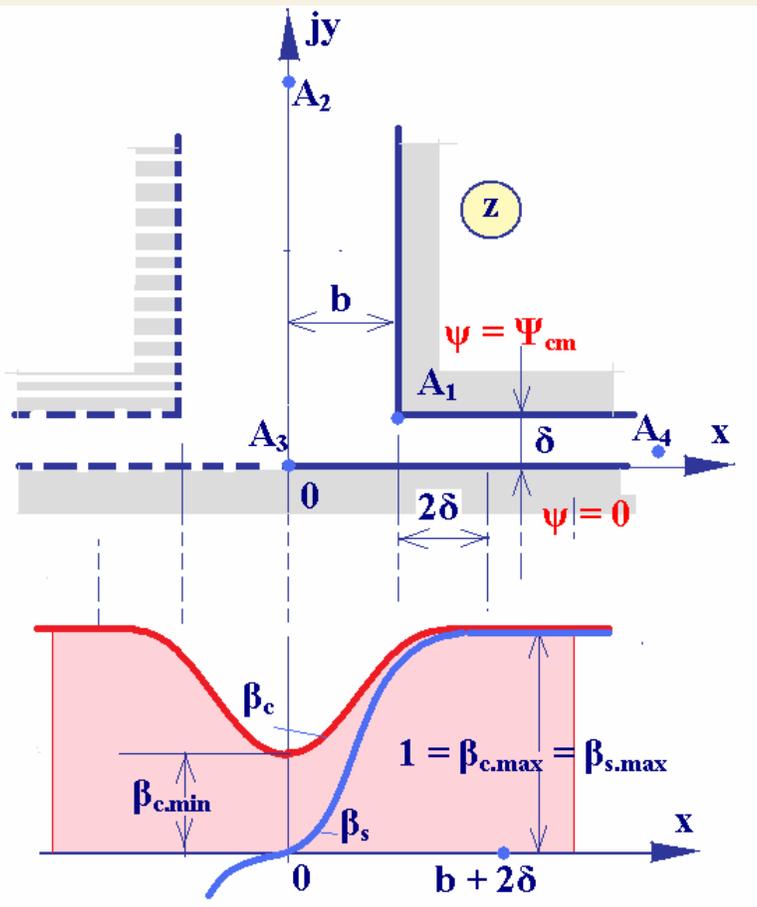
$$\beta_{c\min} = \sqrt{\frac{a}{a+1}} \quad \beta_{s\min} = 0 \quad a = \left(\frac{\delta}{b}\right)^2$$

Удельная магнитная проводимость зазора

Уравнение преобразования координат для поверхности гладкого сердечника ($y = 0$) можно переписать относительно функции β_s

$$z = x = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \operatorname{arth} \beta_s \right)$$

$$= \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1+\beta_s}{1-\beta_s} \right) \quad \text{где } \beta_s = (0 \dots 1)$$



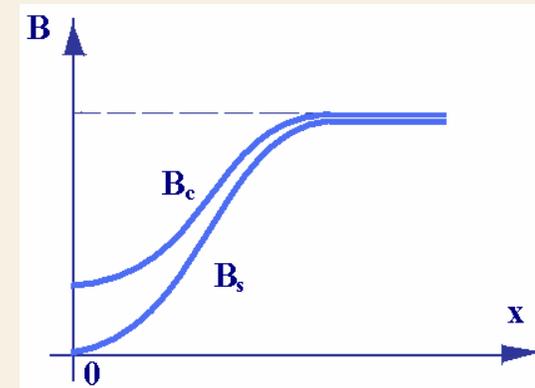
Построим графики функций β_c и β_s

По ним можно найти напряженность и индукцию магнитного поля на гладкой поверхности

$$H_c = \beta_c \cdot \lambda_{\max} \cdot \Psi_{cm} \quad B_c = \mu_0 H_c$$

$$H_s = \beta_s \cdot \lambda_{\max} \cdot \Psi_{sm} \quad B_s = \mu_0 H_s$$

Это путь к определению интегральных величин (B, H) в зазоре реальной ЭМ (при односторонней зубчатости)



Удельная магнитная проводимость зазора

Простой способ построения графиков функций β_c и β_s

Найдем взаимную зависимость функций β_c и β_s с помощью координаты t

$$\beta_c = \sqrt{\frac{t}{t+1}} \rightarrow t = \frac{\beta_c^2}{1-\beta_c^2} \quad \text{тогда} \quad \beta_s = \sqrt{\beta_c^2(1+a) - a}$$

$$\beta_s = \sqrt{\frac{t-a}{t+1}} \rightarrow t = \frac{\beta_s^2 + a}{1-\beta_s^2} \quad \text{тогда} \quad \beta_c = \sqrt{\frac{\beta_s^2 + a}{1+a}}$$

Уравнение преобразования координат на поверхности гладкого сердечника можно выразить как

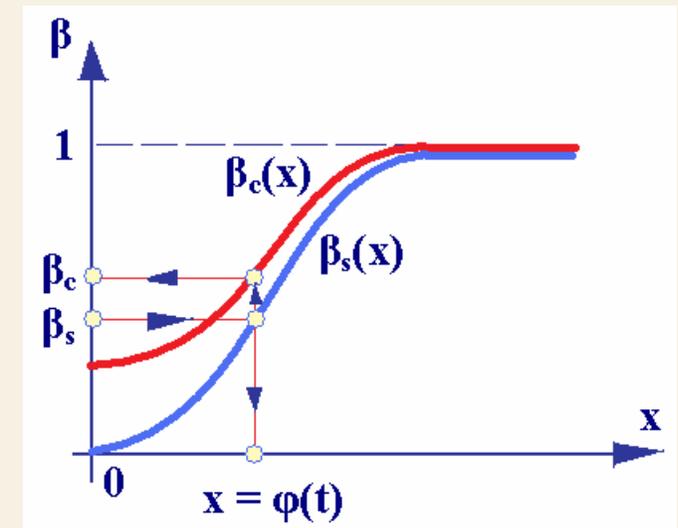
$$x = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{\beta_s}{\sqrt{a}} + \operatorname{arth} \beta_s \right)$$

или

$$x = \frac{2\delta}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\beta_c^2(1+a) - a}{a}} + \operatorname{arth} (\beta_c \sqrt{1+a} - a) \right)$$

Строим графики:

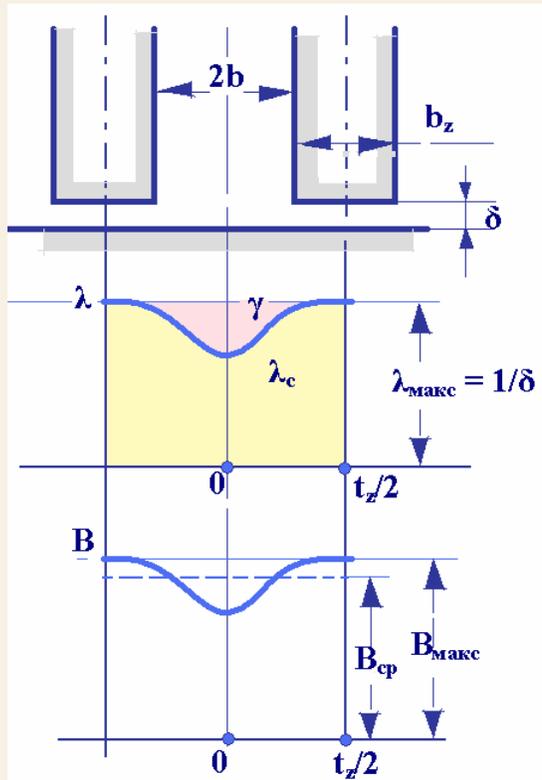
- задаемся β_s (0...1)
- находим β_c
- находим соотв. x



Магнитная проводимость зубцового деления

Рассмотрим четное поле в пределах зубцового деления (между осями зубцов)

При $b_z > 3\delta$ влиянием соседних пазов можно пренебречь



При отсутствии паза удельная проводимость постоянна $\lambda_c(x) = \lambda_{\max} = 1/\delta$

Магнитная проводимость зубцового деления (от $-t_z/2$ до $t_z/2$)

$$\Lambda_{c\max} = 2 \int_0^{t_z/2} \lambda_{\max} dx = t_z \lambda_{\max} = t_z \frac{1}{\delta}$$

Открытый паз снижает магнитную проводимость $\Lambda_c = 2 \int_0^{t_z/2} \lambda_c dx$

Здесь рассматривается безразмерный коэффициент проводимости

Полная проводимость зубцового деления [Гн] $\Lambda_c = \mu_0 l_\delta \Lambda_c$

Поток униполярного намагничивания при МДС зазора $\Delta\psi$ $\Phi_{t_z} = \Delta\psi \cdot \mu_0 l_\delta \Lambda_c$

Найдем уменьшение проводимости, обусловленное влиянием паза

$$\Lambda_{c\max} - \Lambda_c = \gamma = 2 \int_0^{t_z/2} (\lambda_{\max} - \lambda_c) dx$$

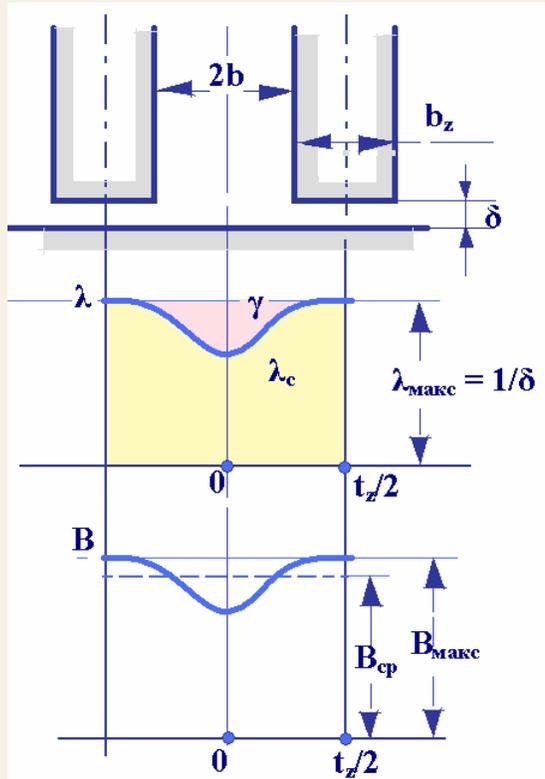
(можно интегрировать до ∞)

Магнитная проводимость зубцового деления

При интегрировании учтем $\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$ $\lambda_c = \frac{1}{\delta} \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

При интегрировании вдоль вещественной оси $dx = dz$

Тогда уменьшение проводимости найдем как



Из уравнения Ш-К $\frac{dz}{dt} = \frac{\delta}{\pi t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}}$

$$\begin{aligned} \gamma &= 2 \int_{x=0}^{x=\infty} (\lambda_{\max} - \lambda_c) dx = 2 \int_{t=0}^{t=\infty} (\lambda_{\max} - \lambda_c) \frac{dz}{dt} dt \\ &= 2 \int_{t=0}^{t=\infty} \frac{1}{\delta} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{t+1}} \right) \frac{\delta}{\pi t} \sqrt{\frac{t+1}{t-a}} dt \\ &= 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{a}} - \ln \sqrt{1 + \frac{1}{a}} \right) \end{aligned}$$

Степень уменьшения проводимости зубцового деления при униполярном намагничивании – коэффициент Картера

$$k_{\delta} = \frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_c}$$

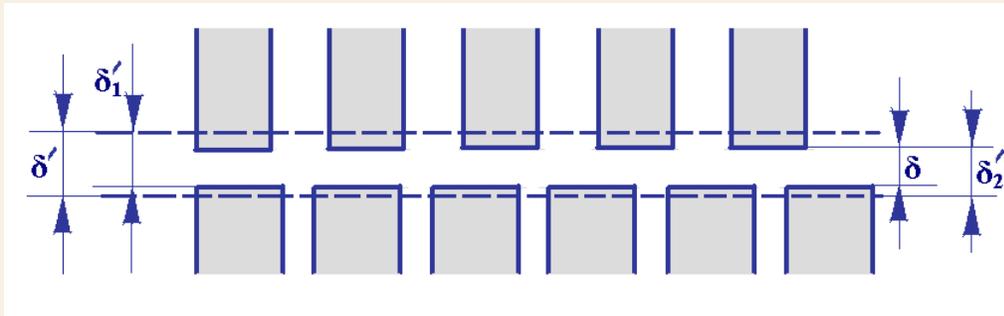
Также $k_{\delta} = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{cp}} = \frac{B_{\max}}{B_{cp}}$ характеризует уменьшение ср.индукции в зазоре при наличии пазов

Магнитная проводимость зубцового деления и коэффициент Картера

Можно записать проводимость зубцового деления при наличии паза как $\Lambda_c = \frac{\Lambda_{\max}}{k_\delta} = \frac{t_z}{\delta k_\delta} = \frac{t_z}{\delta'}$

δ' – эквивалентный расчетный зазор, при котором поток зубцового деления в гладком зазоре такой же, как в реальном зазоре при наличии паза

k_δ позволяет в общей теории ЭМ перейти к анализу ЭМ с гладким зазором (но увеличенным до эквивалентного)



При двусторонней зубчатости используется

$k_\delta = k_{\delta 1} \cdot k_{\delta 2}$ (Вольдек А.И.)

- $k_{\delta 1}$ учитывает зубчатость 1 сердечника
- $k_{\delta 2}$ учитывает зубчатость 2 сердечника

В инженерной практике считают $k_\delta = \frac{t_z}{t_z - \gamma}$, $\gamma \approx \frac{\left(\frac{b_{\text{ш}}}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\frac{b_{\text{ш}}}{\delta}\right)^2}$

Но мы теперь знаем как посчитать точно

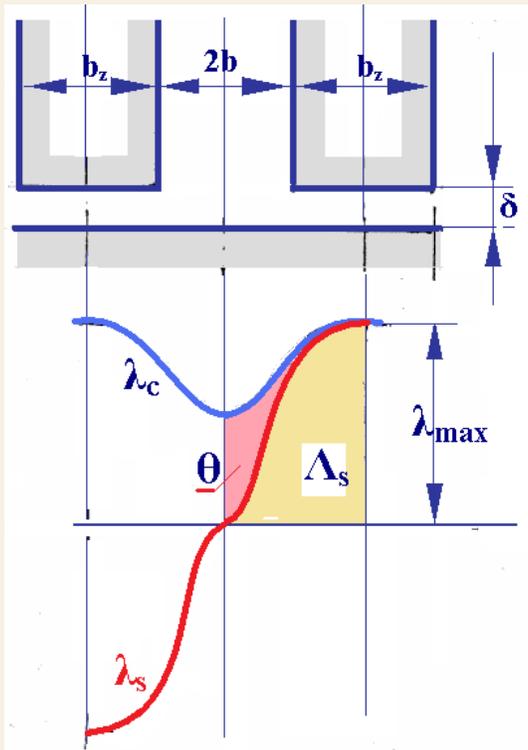
$$k_\delta = \frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_c} = \frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_{\max} - \gamma}$$

Магнитная проводимость зубцового деления

Магнитную проводимость при нечетном поле определяют на половине зубцового деления

Она, очевидно, меньше, чем для четного поля

$$\Lambda_s = \int_0^{t_z/2} \lambda_s dx$$



Найдем разность проводимостей для четного и нечетного поля на половине t_z

$$\Theta = \frac{\Lambda_c}{2} - \Lambda_s = \int_0^{t_z/2} (\lambda_c - \lambda_s) dx = \int_0^{\infty} (\lambda_c - \lambda_s) dx$$

Мы определяли удельную проводимость как $\lambda_c = \frac{H_c}{\Psi_{cm}}$ $\lambda_s = \frac{H_s}{\Psi_{sm}}$

При одинаковых потенциалах зубца для четного и нечетного поля $\Psi_{cm} = \Psi_{sm} = \Psi_1$

$$\Theta = \frac{1}{\Psi_1} \int_0^{\infty} (H_c - H_s) dx = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1} \quad \text{где} \quad \varphi_c = \int H_c dx \quad \varphi_s = \int H_s dx$$

– потоки вектора напряженности

Магнитная проводимость зубцового деления

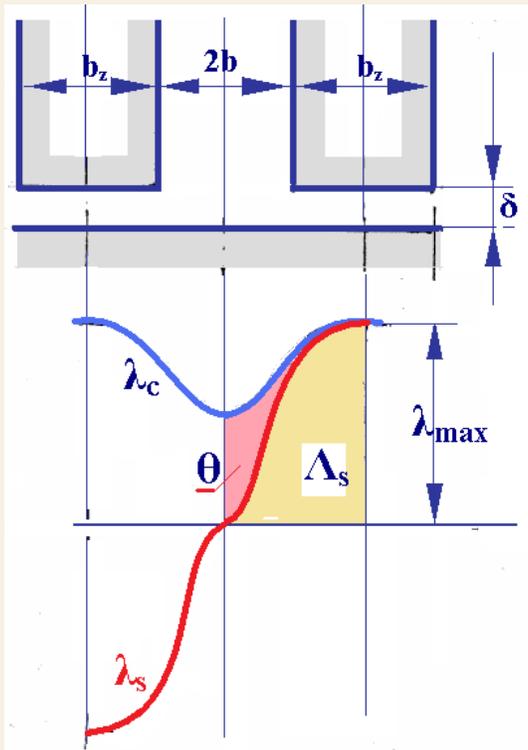
Для точек, расположенных на вещественной оси, скалярный магнитный потенциал $\psi_c = \psi_s = 0$

Тогда комплексная потенциальная функция для этих точек на оси

$$w_c = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \operatorname{arch}(t_1) = \frac{\Psi_{cm}}{\pi} \ln(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}) = \varphi_c + j\psi_c = \varphi_c$$

$$w_s = \frac{\Psi_{sm}}{\pi} \ln \frac{t}{a} = \varphi_s + j\psi_s = \varphi_s$$

$$\text{где } t_1 = \frac{2t}{a} - 1$$



и разность проводимостей

$$\Theta = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1} \Big|_{x=t_z/2} = \frac{\varphi_c - \varphi_s}{\Psi_1} \Big|_{\substack{x \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty}} = \frac{w_c - w_s}{\Psi_1} \Big|_{t \rightarrow \infty}$$

Подставим выражения w_c, w_s

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \ln(t_1 + \sqrt{t_1^2 - 1}) - \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{t}{a}\right) \Big|_{t \rightarrow \infty}$$

$$= \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{\left(\frac{2t}{a} - 1\right) + \sqrt{\left(\frac{2t}{a} - 1\right)^2 - 1}}{\frac{t}{a}} \right) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{1}{\pi} \ln \left(\frac{2t + 2t}{t} \right) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\ln(4)}{\pi} = 0.44127$$

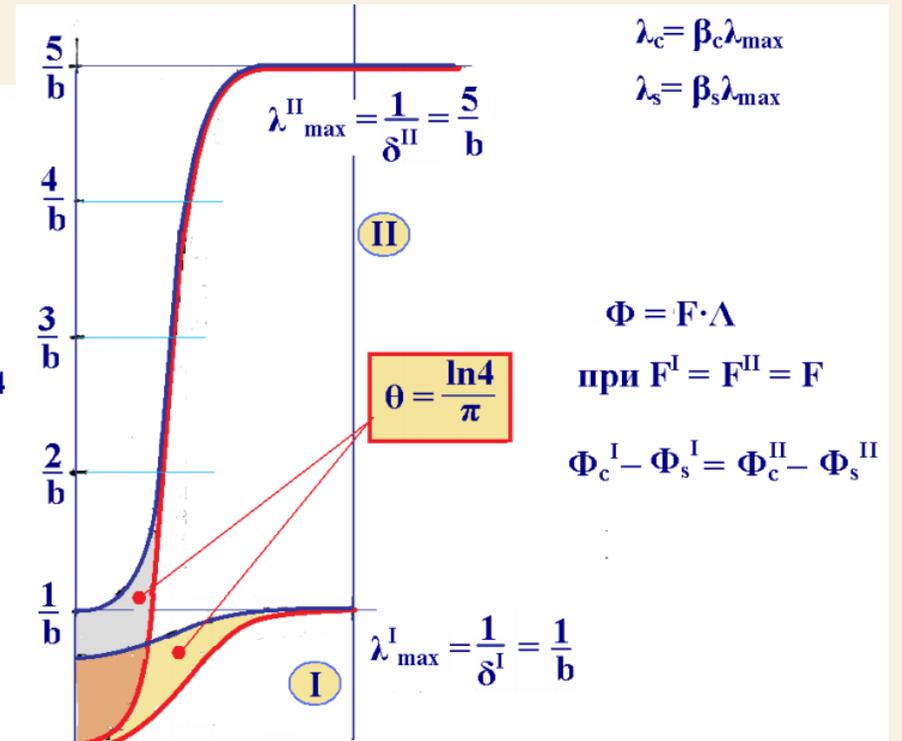
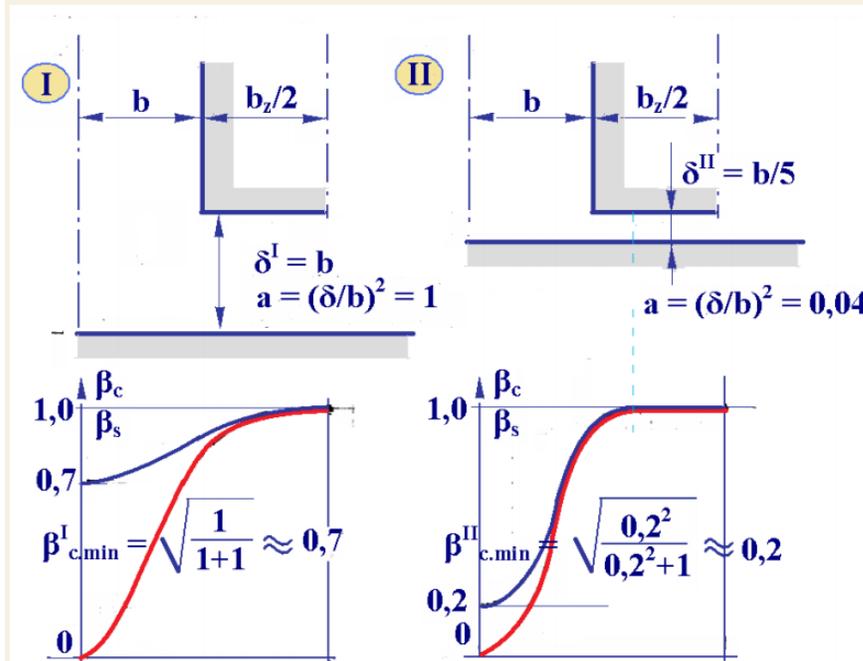
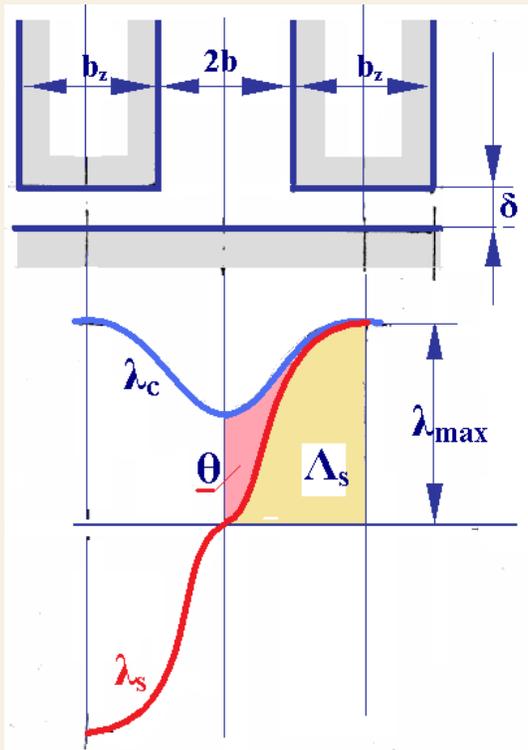
Магнитная проводимость зубцового деления

Разность проводимостей для четного и нечетного поля на половине t_z не зависит от размеров зубцовой зоны (Сорокер Т.Г.)

$$\Theta = \frac{\ln(4)}{\pi} = 0.44127$$

Можно найти проводимости как
(при $b_z > 3\delta$)

$$\Lambda_s = \frac{\Lambda_c}{2} - \Theta = \frac{t_z}{2\delta k_\delta} - \frac{\ln 4}{\pi}$$



Магнитное поле в зазоре ЭМ



Итак, мы перешли от анализа сложного несимметричного поля в зазоре к расчету интегральных величин – магнитных проводимостей

3D → 2D → поле паза → магнитные проводимости → кривая B на t_{zi} → распределение B_δ

Решена задача о распределении магнитного поля в зазоре ЭМ

Затем – гармонический анализ индукции, расчет потоков и потокосцеплений обмоток, расчет ЭДС (связь электрической и магнитной цепей электрической машины через постоянные индуктивности)

Но при этом – линейная магнитная цепь (ненасыщенная)

Надо совместить точный анализ поля и учет насыщения отдельных элементов магнитной цепи

Для этого – специальная эквивалентная схема замещения магнитной цепи ЭМ на основе МЗК (расчет цепи vs расчет поля)

Далее – Метод зубцовых контуров